

## オプションプライシングにおける強マルコフ性について（1）

京都大学経済学研究科 江上 雅彦

【要約】このレポートでは、原資産のモデリング・派生証券のプライシングのために最も重要と考えられるマルコフ過程と呼ばれるカテゴリーに焦点を当て、マルコフ過程に共通するマルコフ性、および強マルコフ性がファイナンス工学で利用されている事例を収集し、どのような知見をもたらすかを考察する。実際、複雑な理工学的な計算をストリームラインして見通しのよいものにするために有用不可欠な性質である。

このレポートでは原資産を表す確率過程  $X$  とし、 $X$  を原資産とする派生証券を  $Y$  とし、まず第1節でマルコフ性の定義を示す。時刻  $t$  までの情報に基づいて（その時点では不確かな）派生証券  $Y$  の価格の推計をする際に、時刻  $t$  にいたるまでの  $X$  のすべての情報を知らなくとも、時刻  $t$  における  $X$  の値 ( $X_t$ ) を知ることで十分な場合、 $X$  はマルコフ性を持つという。この性質は派生証券  $Y$  の価格をシミュレーション等で計算する場合の負荷を大きく軽減する。さらに停止時刻 (stopping time) と呼ばれる性質を持つランダムな時刻の場合も上記の性質が成り立つとき、 $X$  は強マルコフ性を持つという。

第2節では原資産  $X$  が株式、派生証券  $Y$  が Down-and-In のコールオプションの場合、強マルコフ性がどのように使われるかを例示する。このオプションが価値を持つためには予め設定された株価の下限価格まで下落する必要があるが、その下限価格を最初に通過する時刻 (first hitting time) に注目して強マルコフ性を適用するとブラックショールズの価格式を利用することができる等、大幅な計算負荷の軽減が実現することを示す。

第3節では、より複雑な計算を効率よく遂行するために必要な理論的・実践的なファイナンス工学の道具 (シフトオペレータ、 $\alpha$ -ポテンシャル、微小生成素) を説明する。強マルコフ性をこれらの概念とともに利用することで、停止時刻の前後で  $\alpha$  ポテンシャルを二分し、確率過程のダイナミクスの分析を容易にするだけでなく、有名なディンキンの公式 (Dynkin's formula) の証明も可能となる。そのうえでディンキンの公式と微小生成素を使って、first hitting time の分布を明示的に (ラプラス変換の形で) 計算する方法を示す。

本資料に関する著作権は、株式会社大阪取引所にあります。

本資料の一部又は全部を無断で転用、複製することはできません。

本資料の内容は、株式会社大阪取引所の意見・見解を示すものではありません。

本資料は、デリバティブ商品の取引の勧誘を目的としたものではありません。

筆者および株式会社大阪取引所は、本資料に基づく投資あるいは類似の行為により発生した如何なる損失や損害に対して、一切の責任を負うものではありません。