オプションプライシングにおける強マルコフ性について（2）

京都大学経済学研究科　江上 雅彦

【要約】　Part I につづいて、強マルコフ性を使ったファイナンス工学上の分析方法についてレポートする。

第 4 節でまず 2 つの停止時刻を取り扱う場合について説明する。そのうち（少なくとも）１つが first hitting time である場合、(4.3)式が成り立つ。Part I で紹介したシフトオペレータを使うことでこの議論も容易になる。複数回実行可能なアメリカンタイプのオプションの分析等に利用することができる。また（4.4)式は指数分布に従う確率変数が持つ無記憶性をシフトオペレータで表現したものである。レジーム（強気・弱気市場など）が異なる場合に異なるモデルパラメータを用いるレジームスイッチモデルにおいて、その遷移に要する期間（待ち時間）を指数分布で表現されるため（4.4）式も有用と考えられる。

第 5 節では停止時刻（stopping time)でないランダムな時刻、つまり強マルコフ性を利用できない時刻の取扱いについて説明する。停止時刻でないランダムな時刻の一例は最終通過時刻である。株式投資において株価を確率過程 X で表現し、売却すべき価格ラインを設定（ c とおく）する場合を考える。投資家はその水準より高い水準（αとおく）を警戒ラインと考え、レベルαを「最後に」通過する時刻（Lαとおく)から起算して売却レベル c に到達する時刻（Hc とおく）までの時間（Hc - Lα）に興味があるかもしれない。例えば損失をカバーするため流動性を確保する必要がある場合など。この問題では強マルコフ性を利用できないため、Part I の第 2 節で示したような式展開は不可能であるが、確率過程Xを時間反転して時刻 Hc からスタートする確率過程Yを考えると、Xにとっての（Hc - Lα）は c からスタートするYから見ればαへの first hitting time になる。よってYのダイナミクスを示す微小生成素が分かれば明示的な計算が可能となるケースがある。実際にXが幾何ブラウン運動のとき、適切なパラメータのもとでの計算結果を Figure 1 で示した。

付録では、Part I で示したシフトオペレータを使ったαポテンシャルの取扱い、レジームスイッチモデルで使われるマルコフ連鎖における微小生成素の計算など、モデリングに関連して有用と思われる式展開を詳説した。