

## 日次情報による取引コストの計測

大阪大学 大学院経済学研究科

数理・データ科学教育研究センター 大屋幸輔

### 1 はじめに

市場において取引対象資産の本源的価値と取引価格との間には様々な要因によって乖離が生じることがある。その乖離は取引コストと呼ばれ、市場参加者にとっては大きな関心事である。取引コスト自体は、市場の制度改革や我々をとりまく情報技術の進展などにより、年々小さくなっている。例えば大屋 (2022) では日経平均先物市場の取引コストの指標としてプラシング・エラーを計測し、日経 225 先物、日経 225mini のどちらについても十分に小さいことを報告している。

取引時間内での呼値や約定価格などを網羅したティックデータが利用できる場合は、実効スプレッドが取引コストの一つの指標となる。ティックデータが利用できない場合は、日ごとに観測される終値、高値、安値などの日次データを利用して、実効スプレッドを推定することになる。近年ではティックデータが利用できる状況も増えているが、市場の改革と取引コストの関係を時系列的な視点から見ていく場合など、遠い過去の時点ではティックデータが利用できない時期も存在している。そのようなティックデータが利用可能でない時期を考慮すると、取引コストとしての実効スプレッドを日次データにより推計する必要が生じてくる。モデルを利用したものとして代表的な研究が Roll (1984) であり、その Roll モデルをベイズ的に推測する方法を提案しているものが Hasbrouck (2009) である。他にも高値と安値の差を利用した Corwin and Schultz (2012) や Abdi and Ranaldo (2017) などが関連する研究としてあげられる。さらに Jahan-Parvar and Zikes (2023) はこれらの先行研究で提案された実効スプレッドの推計方法に関して詳細な分析を行い、近年の市場において確認される計測対象である実効スプレッドの縮小と増大するボラティリティという二者の関係を SNR(Signal to Noise Ratio) が小さい状況としてとらえ、SNR が大きい場合には問題にはならないが、SNR が小さい場合にはボラティリティの増大とともに実効スプレッドの推定で生じるバイアスが増加することを明らかにしている。本稿では日経平均先物市場の実効スプレッドが小さいということを鑑み、Jahan-Parvar and Zikes (2023) が警鐘を鳴らしている状況下で先行研究の提唱している推計方法の有効性について考察していく。

## 2 実効スプレッドの推計

利用する日次データは、第  $t$  日の終値の対数値  $p_t$ 、収益率  $r_t = p_t - p_{t-1}$ 、同日の高値と安値のそれぞれの対数値  $h_t, l_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) とする。Roll (1984) は効率的価格の対数値  $m_t$  を平均ゼロのイノベーション  $\varepsilon_t$  によって駆動されるランダムウォークとして定式化し、実際に観測される対数約定価格  $p_t$  は  $m_t$  にスプレッド  $s$  の  $1/2$  が売買の方向  $q_t$  に応じて付加される以下の Roll モデルを提唱している<sup>\*1</sup>。

$$p_t = m_t + \frac{s}{2}q_t, \quad (1)$$

$$m_t = m_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2)$$

$q_t$  は買い注文の場合  $+1$ 、売り注文の場合は  $-1$  をそれぞれ確率  $1/2$  でとる独立な確率変数である。さらに  $q_t$  は  $\varepsilon_t$  との独立性も仮定されている。これらの仮定のもと、スプレッド  $s$  は収益率  $r_t$  の一次の自己共分散  $\text{cov}(r_t, r_{t-1}) = -s^2/4$  を使ってもとめられる。実際には一次の自己共分散はマイナスにならない場合もあるため、Roll (1984) による実効スプレッドの推計は以下の  $R$  がもちいられる。

$$R = 2 \sqrt{\max \left\{ -\frac{1}{T-2} \sum_{t=3}^T r_t r_{t-1}, 0 \right\}} \quad (3)$$

Corwin and Schultz (2012) は日次の高値と安値の対数値  $h_t$  と  $l_t$  をもちいて以下の CS による実効スプレッドの推計方法を提唱している。

$$CS = \max \left\{ \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} S_t, 0 \right\}, \quad (4)$$

$$S_t = \frac{2(e^{\alpha t} - 1)}{1 + e^{\alpha t}}, \quad \alpha_t = \frac{\sqrt{2\beta_t} - \sqrt{\beta_t}}{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{\gamma_t}{3 - 2\sqrt{2}}}, \quad (5)$$

$$\beta_t = (h_{t+1} - l_{t+1})^2 + (h_t - l_t)^2, \quad \gamma_t = (\max(h_{t+1}, h_t) - \min(l_{t+1}, l_t))^2 \quad (6)$$

この推計法にはデータ系列が連続確率過程に従っているという前提があり、日次ベースで離散的に観測される状況での利用は必ずしも適さないとも言える。また Corwin and

<sup>\*1</sup> Hasbrouck (2009) による推計には MCMC(Markov Chain Monte Carlo) 法が必要で簡便な推計法ではないため、ここでは取り扱わない。

Schultz (2012) では夜間における価格変動についての調整法を与えており、本稿でもその調整法を適用している\*2。

Abdi and Ranaldo (2017) による推計法は  $R$  と  $CS$  のアイデアを取り入れたもので、対数値の高値と安値の中間の値を  $\eta_t = (h_t + l_t)/2$  としたとき、 $\delta_t = 4(p_t - \eta_t)(p_t - \eta_{t+1})$  の期待値が  $E(\delta_t) = s^2$  であることを利用している。

$$AR = \sqrt{\max \left\{ \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} \delta_t, 0 \right\}} \quad (7)$$

注目すべき点は (3), (4), (7) の各推計法のいずれもが  $\max(\cdot, 0)$  によって、本来は非負となるべき値が負になった場合はゼロで置き換える処理をしていることである。Jahan-Parvar and Zikes (2023) はこの処理がバイアスを生じさせる源泉であると主張し、標本サイズ  $T$  が増加した場合でも、 $CS$  と  $AR$  については、各  $t$  ごとに  $S_t$  や  $\delta_t$  が負の値となった場合にゼロで置き換える処理を行うとバイアスが残ること、そして (4) や (7) にあるように算術平均をもとめた後で、その値が負の場合はゼロに置き換える処理であれば漸近的にはバイアスが消えることを単純なケースにおいて示している\*3。

### 3 日経平均先物市場への適用

以下では日経平均先物市場の実効スプレッドの (3), (4), (7) による推計値をみていく。推計には 2005 年 1 月 4 日から 2022 年 2 月 28 日の日次で観測される日経 225 先物の約定件数の大きさによる中心限月の終値、高値、安値をもちいた\*4。

各推計値をもとめるために  $t = 1, \dots, T$  における  $T$  を定める必要があるが、ここでは四半期に一度の推計として、四半期に含まれる日数に相当する値を  $T$  としている。

図 1 は各推計値の時系列プロットである。いずれの推計値においても、ゼロと計測されている時点が数多くあることがわかるが、特に  $CS$  が顕著である。全般的に推計値が小さい値であることから、Jahan-Parvar and Zikes (2023) が指摘している SNR が小さい状況における推計に相当していると考えられる。ただしその場合はボラティリティの増加

\*2 夜間取引のデータを利用することで推計値の改善は期待できるが、そのデータは  $R$ ,  $AR$  の推計に利用していない追加的な情報である。従って、他の推計方法との比較のためここでは夜間取引のデータを利用した推計は行っていない。

\*3 Jahan-Parvar and Zikes (2023) では他に Holden (2009) による推計値も分析対象としているが、呼値のサイズや価格のクラスタリングによる情報を活用する方法で、本稿で扱っている他の推計法とタイプが異なるため、ここでは考察の対象としていない。

\*4 日経メディア・マーケティング社のティック日次情報を利用している。

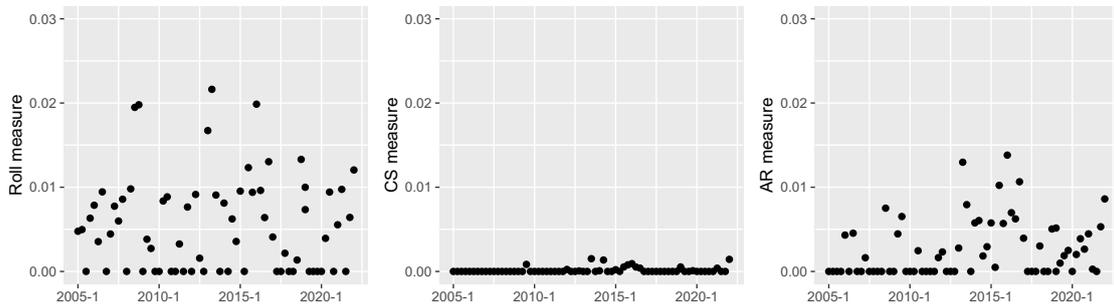


図1 実効スプレッドの推計値

に伴う上方へのバイアスが生じるとされているが、図1からはそのような傾向は見られない。2005年から2020年にわたってボラティリティが一定であるとは考えにくく、低頻度の日次観測データのみから実効スプレッドを推計することの難しさの証左となっている。

高頻度データによる実効スプレッドを計測していないため、 $R$ 、 $CS$ 、 $AR$ のどれが優れているのかは更なる検証を必要とする。いずれの推計法も簡便なものであるが、その簡便性をもたらすために課されている、例えば取引の方向を表す  $q_t$  と効率的価格を駆動するイノベーション  $\varepsilon_t$  の独立性や価格過程の連続性といった諸仮定は必ずしも現実的ではなく、Jahan-Parvar and Zikes (2023) が主張するようにSNRが低い状況では、先行研究で提唱されている各種推計法の利用は適切ではないと考えられる。

## 4 おわりに

本稿では、高頻度データが利用できない状況においても必要とされる実効スプレッドの推計法について検討した。スプレッドが小さく、そしてボラティリティが高い状況では、先行研究で提唱されている日次データによる推計法では高頻度データから抽出される特性をとらえるには不十分であり、推計の前提となっているモデルに対する諸仮定を現実的なものにした拡張モデルのもとでの新たな推計法の開発が望まれる。本稿では考察の対象としなかったHasbrouck (2009) はRollモデルをベイズ推定したものであるが、Gibbsサンプリングを適用することで比較的容易な推計方法となっている。Rollモデルに課されている仮定を現実的なものにすれば、MCMC法におけるサンプリングはGibbsサンプリングのようにシンプルにはならない可能性はあるが、その成果は期待できるものであり、今後の検討課題としたい。

## 参考文献

- 大屋幸輔 (2022), 「日経平均先物市場の市場の質の計測」, 『先物・オプションレポート』, 34(4), 大阪取引所.
- Abdi, F. and A. Rinaldo (2017), “A simple estimation of bid-ask spreads from daily close, high, and low prices,” *The Review of Financial Studies*, 30(12), 4437–4480.
- Corwin, S. A. and P. Schultz (2012), “A simple way to estimate bid-ask spreads from daily high and low prices,” *The Journal of Finance*, 67(2), 719–760.
- Hasbrouck, J. (2009), “Trading costs and returns for US equities: Estimating effective costs from daily data,” *The Journal of Finance*, 64(3), 1445–1477.
- Holden, C. W. (2009), “New low-frequency spread measures,” *Journal of Financial Markets*, 12(4), 778–813.
- Jahan-Parvar, M. R. and F. Zikes (2023), “When do low-frequency measures really measure effective spreads? Evidence from equity and foreign exchange markets,” *The Review of Financial Studies*, doi:10.1093/rfs/hhad028.
- Roll, R. (1984), “A simple implicit measure of the effective bid-ask spread in an efficient market,” *The Journal of finance*, 39(4), 1127–1139.

本資料に関する著作権は、株式会社大阪取引所にあります。

本資料の一部又は全部を無断で転用、複製することはできません。

本資料の内容は、株式会社大阪取引所の意見・見解を示すものではありません。

本資料は、デリバティブ商品の取引の勧誘を目的としたものではありません。

筆者および株式会社大阪取引所は、本資料に基づく投資あるいは類似の行為により発生した如何なる損失や損害に対して、一切の責任を負うものではありません。