

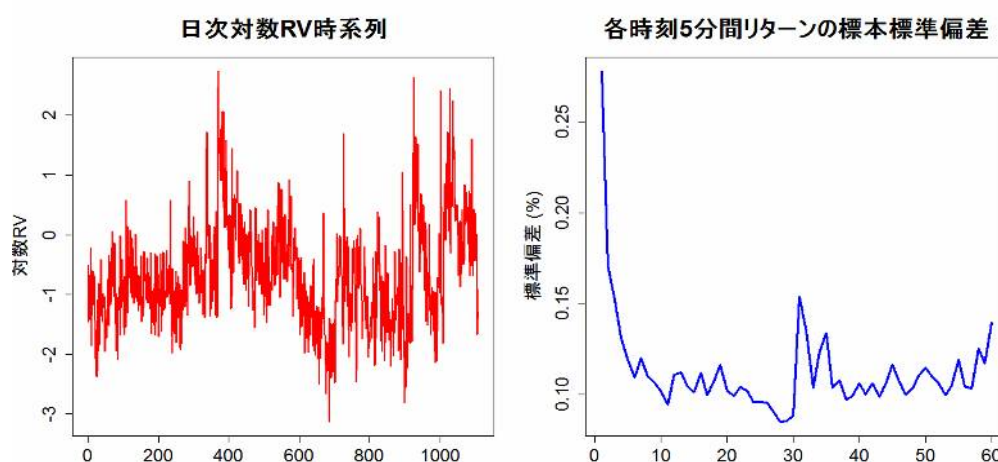
## 日経平均スポット・ボラティリティ日次パスの関数 ARCH モデリング

甲南大学経済学部 石田 功

### 1. はじめに

2011年11月21日から2016年5月31日の日経平均株価の5分間対数変化率(%)の2乗を計算すれば、 $60 \times 1109$ 日=66540の観測値が得られる(オーバーナイト変化率及び昼休み変化率は含まれない)。図1左パネルはこのデータの日ごとの和(日次実現分散、RV)の対数の時系列プロットで、右パネルは日中5分刻み時間帯ごとの平均の平方根(つまり、5分間変化率の標本標準偏差)を最初の5分間(9:00-9:05)から順にプロットしたものである<sup>1</sup>。前者からは持続性(日次対数RVの標本自己相関係数は0.73)、後者からは日周期性という、多くの金融時系列のボラティリティに共通の特徴が見てとれる(日周期性のパターンは系列により異なる。例えば、米国株式市場はU字型であるが、日経平均株価は前場・後場それぞれのU字を合せてW字型)。

図1: 日経平均株価ボラティリティ



金融資産やデリバティブのトレーディングにおいては、ボラティリティの日次レベルの変動だけでなく、より短期の瞬間的ボラティリティ(スポット・ボラティリティ)の計測や予測が重要になることも多い。スポット・ボラティリティの計測・予測においては、日次の持続性と日周期性の両方を捉えることが必要になる。これまでの研究においては、スポット・ボラティリティを毎日同一の(もしくは、せいぜい曜日等によって異なる)日周期ファクター(時刻の決定論的関数。例えば、図1右グラフのような方法で推定)と定常な確率的変動要素の積もしくは和とするアプローチが多かった(例えば、Bos et al. 2012)。しかし、スポット・ボラティリティの計測・予測には、近年急速に発展した関数データ解析の手法もまた有効かもしれない。

<sup>1</sup> 日経メディア・マーケティング社の日経 NEEDS ティックデータ・株価指数先物・オプションデータを用いて作成した。なお、2011年11月21日は東証の取引時間が現在の1日5時間になった最初の日である。

関数データ解析とは、文字通り、「関数データ」を解析する統計の一分野である。例えば、特定の人の誕生から成人するまでの身長は年齢の連続関数なので、この記録は関数データである。母集団からランダムに1人の身長データを抽出するとすれば、この関数は確率関数となる。関数データは必ずしも時間の関数である必要はなく、例えば、毎日1回定時刻に計測・記録した地球の表面温度データは緯度・経度の2変数関数の日次関数時系列データとなる。また、資産価格の一定期間の記録を日次分割すれば、日次サンプルパス（時刻の関数）が時系列として並んだ関数時系列データが得られる<sup>2</sup>。

資産価格のスポット・ボラティリティの日次サンプル・パス（スポット・ボラティリティ日次パス）が分析対象である場合、これは直接観測できない潜在的な確率関数となる。Hörmann et al. (2013)はこの時間変動を捉える関数データ解析のモデルとして、ARCHモデルを拡張した関数ARCHモデルを提案した。本稿ではこの関数ARCHモデルを中心に紹介する。

## 2. 関数ARCH(1)、関数GARCH(1)過程の定義

### 2.1. 関数ARCH(1)過程

次式(1),(2)を満たす関数時系列 $\{Y_t\}$ を関数ARCH(1)過程と呼ぶ(Hörmann et al. 2013)：

$$Y_t = \varepsilon_t \sigma_t \quad (1)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha Y_{t-1}^2 \quad (2)$$

一見、通常の単変量ARCH(1)過程に見えるが、構成要素が異なる。まず、記号 $Y_t$ は $Y_t(s)$ を略したもので、各 $t$ について $Y_t(s)$ は時刻 $s$ の確率関数（定義域は $[s_0, s_1]$ ）、 $\{Y_t\}$ は確率関数の時系列となる。時刻金融時系列への応用においては、 $s_0, s_1$ はそれぞれ各日の取引開始時刻と取引終了時刻、 $Y_t(s)$ は分析対象となる資産価格リターン（もしくは株価指数等のリターン） $Y_t(s) \equiv \ln P_t(s) - \ln P_t(s-h)$ の第 $t$ 日の時刻 $s$ の値となる（ $P_t(s)$ は第 $t$ 日、時刻 $s$ の資産価格。 $h$ は5分等のごく短期）。 $Y_t(s) = \ln P_t(s) - \ln P_t(s-h)$ 。  $\varepsilon_t, \sigma_t$ もそれぞれ $\varepsilon_t(s), \sigma_t(s)$ の略で、時間の確率関数（定義域 $[s_0, s_1]$ ）であるが、 $\{\varepsilon_t\}$ は $E[\varepsilon_t(s)] = 0, E[\varepsilon_t^2(s)] = 1$ （すべての $t, s$ について）のi.i.d.時系列<sup>3</sup>、 $E_{t-1}[Y_t^2(s)] = E_{t-1}[\varepsilon_t^2(s)\sigma_t^2(s)] = \sigma_t^2(s)E_{t-1}[\varepsilon_t^2(s)] = \sigma_t^2(s)$ なので、 $\sigma_t(s)$ は第 $t$ 日のスポット・ボラティリティ・パスとなる（ここで $E_{t-1}[\cdot]$ は $\{Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots\}$ で条件付けた期待値）。また、 $\omega(s)$ は定義域 $[s_0, s_1]$ の非負関数（確率関数ではない）、 $\alpha$ は定義域 $[s_0, s_1]$ の非負関数と同じ定義域の別の非負関数に変換する積分作用素で、

$$\alpha(x)(s) \equiv \int a(s, u)x(u)du \quad (3)$$

の形を持っているものとする（ここで、 $\int a(s, u)x(u)du$ は $\int_{s_0}^{s_1} a(s, u)x(u)du$ の略。以下同様）。

式(3)の表現を用いて式(2)を表現し直せば、

<sup>2</sup> 時間の関数にせよ地理的位置の関数にせよ、定義域すべてにおける関数値のデータを得ることは不可能であり、生の関数データは連続変数の関数ではない。関数データ解析ではまず有限数の点における観測値からスプライン補完等により連続関数データを構成する。

<sup>3</sup> i.i.d.確率関数列の厳密な定義についてはBosq(2000)を参照されたい。

$$\sigma_t^2(s) = \omega(s) + \int a(s, u) Y_{t-1}^2(u) du \quad (4)$$

となり、 $t$ 日の各時点のスポット・ボラティリティがその前日 $t-1$ 日の各時点の超短時間の瞬間的リターン2乗から正の影響を受けることがより明確になる(影響の大きさは $a(s, u)$ により決まる)。

Hörmann et al. (2013)は関数 ARCH(1)過程の性質や $\omega, \alpha$ の推定量(次節で説明する Yule-Walker 型推定量)の性質を求めるために様々な条件を課しているが、ここではそれらの条件が満たされているものとする。以下、 $\alpha x$ のような表現を多用するが、定義が省略されている場合、関数  $x$  はそれらの条件を満たす「時刻 $[s_0, s_1]$ の任意の関数」を指す。また、以下、2つの時刻の関数 $x, y$ の内積は $(x, y) \equiv \int x(s)y(s)ds$ とする<sup>4</sup>。

## 2.2. 関数 GARCH (1,1) 過程

最近、Aue et al. (2015) は関数 ARCH(1)の条件付き分散過程が従う式 (2)を次式で置き換える関数 GARCH (1,1) 過程を提案し、一定の条件下での性質を明らかにした：

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha Y_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (5)$$

ここで、 $\beta$ は非負関数を別の非負関数に変換する作用素である。本稿では説明は省略するが、Aue et al. (2015) は  $\omega, \alpha, \beta$ の推定量として最小2乗推定量を提案している。

単変量時系列解析において、ARCH ( $q$ ) の GARCH (1,1) への拡張がボラティリティ過程の簡潔かつフレキシブルなモデリングに大いに役立ったのと同様に、関数 GARCH (1,1) モデルもスポット・ボラティリティ日次パスの計測と予測の精度向上に役立つことが期待される。

## 3. 関数 ARCH (1) モデルの推定

単変量時系列 $\{Y_t\}$ が GARCH ( $p, q$ ) 過程である場合、 $\{Y_t^2\}$ は ARMA ( $\max(p, q), p$ ) 過程に従う (Bollerslev 1986, p.310)。 $\{Y_t\}$ が ARCH ( $q$ ) (つまり、GARCH ( $0, q$ )) の場合、 $\{Y_t^2\}$ は AR ( $q$ ) 過程となり、そのパラメータを Yule-Walker 推定量により推定することが可能である。Hörmann et al. (2013) は、関数 ARCH (1) モデルも後述の関数 AR (1) モデルとして表現できることに着目し、Yule-Walker 型推定量を提案した。本節では、Hörmann et al. (2013) 及び Horváth & Kokoszka (2012) に沿って、この推定量について説明する。

まず、 $v_t \equiv Y_t^2 - \sigma_t^2$ と置けば、 $Y_t^2 = \sigma_t^2 + v_t = \omega + \alpha Y_{t-1}^2 + v_t$ が得られる(式 (2)より)。 $m(s) \equiv E[Y_t^2(s)]$ 、 $Z_t \equiv Y_t^2 - m$ を定義し、この式に若干の操作を加えれば、 $Z_t = \omega - m + \alpha m + \alpha Z_{t-1} + v_t$ となる。この両辺の期待値をとれば、 $E[Z_t] = 0$ 、 $E[v_t] = 0$ なので、 $0 = \omega - m + \alpha m$ となり、次式が得られる：

$$Z_t = \alpha Z_{t-1} + v_t \quad (6)$$

これは Bosq (2000)が提案した関数自己回帰モデル(もしくは、自己回帰 Hilbertian モデル。略して ARH モデル)の1次のケースである(以下、ARH(1))。Bosq (2000) は  $\alpha$  の推定量として

<sup>4</sup> 関数データ解析に必要な関数解析の数学的ツールは、関数時系列解析を含む関数データ解析の教科書 Horváth & Kokoszka (2012)や関数データ解析と関連が深いカーネル法の教科書である福水(2010)においてコンパクトに手際良く解説されている。

Yule-Walker 型のものを提案し、関数時系列 $\{v_t\}$ が i.i.d.であることを含むある条件下でその一致性を示した。上記の関数 ARCH モデルの場合、 $\{v_t\}$ は i.i.d.とはならないが、この場合の同推定量の一致性については Hörmann et al. (2013) が示した。 $\alpha$ は作用素であり、ここでいう一致性は  $\|\alpha - \hat{\alpha}\|_S \equiv \iint \{\alpha(r, u) - \hat{\alpha}(r, u)\}^2 dr du \xrightarrow{p} 0$  を指す。

ARH (1) の自己相関作用素 $\alpha$ の Yule-Walker 型推定量の理解へのウォーム・アップとして、馴染み深い単変量の定常 AR(1)モデルの自己回帰係数  $\alpha$  ( $|\alpha| < 1$ の定数) の Yule-Walker 推定量の復習からスタートする。 $\{v_t\}$ が単変量のホワイト・ノイズ、 $\{Z_t\}$ が式  $Z_t = \alpha Z_{t-1} + v_t$  を満たす平均 0 の単変量定常 AR (1) 過程 ( $v_t$ と $Z_{t-1}$ とは独立) であれば、式の両辺に $Z_{t-1}$ を掛けて期待値をとることにより  $Cov(Z_t, Z_{t-1}) = \alpha Var(Z_{t-1}) (= \alpha Var(Z_t))$  が得られる。 $C_1 \equiv Cov(Z_t, Z_{t-1})$ 、 $C \equiv Var(Z_{t-1})$ と置けば、 $\alpha = Cov(Z_t, Z_{t-1})/Var(Z_t) = C_1 C^{-1}$ となる。 $C_1$ を 1 次の標本自己共分散  $\hat{C}_1 \equiv T^{-1} \sum_{t=2}^T Z_t Z_{t-1}$ 、分母を標本分散  $\hat{C} \equiv T^{-1} \sum_{t=1}^T Z_t^2$ とすれば $\alpha$ の Yule-Walker 推定量  $\hat{\alpha} = \hat{C}_1 \hat{C}^{-1}$  が得られる。次に一步進めて、 $\{Z_t\}$  が  $Z_t = \alpha Z_{t-1} + v_t$  を満たす  $N$  変量定常 VAR 過程 ( $Z_t = (Z_{1t}, Z_{2t}, \dots, Z_{Nt})'$ 、 $E(Z_t) = 0$ 、 $\alpha$ は $N \times N$ の定数行列、 $v_t$ は $Z_{t-1}$ とは独立な  $N$  次元のホワイト・ノイズ) の場合を考え、単変量の場合と同様のステップをたどると、Yule-Walker 推定量  $\hat{\alpha} = \hat{C}_1 \hat{C}^{-1}$  が得られる。ただし、ここでは  $\hat{C}$  は  $i$  行  $j$  列が  $Cov(Z_{it}, Z_{jt})$  の  $N \times N$  行列、 $\hat{C}_1$  は  $i$  行  $j$  列が  $Cov(Z_{it}, Z_{j,t-1})$  の行列となる。

さて、本題の  $\{Z_t\}$  が式(2)を満たす ARH (1)である場合の作用素 $\alpha$ の推定であるが、この場合も、前述の通り、Yule-Walker 型の一致推定量が得られる。具体的には、一定の条件の下で $\alpha = C_1 C^{-1}$ が成り立ち、単変量の AR、多変量の VAR の場合と形の上では同じ Yule-Walker 型推定量  $\hat{\alpha} = \hat{C}_1 \hat{C}^{-1}$  が得られる。ただし、ここでは、 $C, C_1$ は次式により定義される作用素である：

$$\cdot \text{共分散作用素 } C : \quad Cx \equiv E[\langle Z_t, x \rangle Z_t] \quad (7)$$

$$\cdot \text{1 次の自己共分散作用素 } C_1 : \quad C_1 x \equiv E[\langle Z_t, x \rangle Z_{t+1}] \quad (8)$$

簡単な計算により、

$$(Cx)(s) = \int c(s, u)x(u)du, \quad c(s, u) \equiv Cov(Z_t(s), Z_t(u)) \quad (9)$$

$$(C_1 x)(s) = \int c_1(s, u)x(u)du, \quad c_1(s, u) \equiv Cov(Z_t(s), Z_{t+1}(u)) = Cov(Z_t(s), Z_{t-1}(u)) \quad (10)$$

となることが分かる。ここで、 $Z_t(s)$  は確率関数  $Z_t$ の $s$ 時点の値であるのでひとつの確率変数であり ( $Z_{t+1}(u)$ も同様)、 $Cov(Z_t(s), Z_t(u))$  は定数となる ( $Cov(Z_t(s), Z_{t+1}(u))$ も同様)。もう一度、 $Z_t$ が  $N$  変量時系列の場合に戻り、 $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)'$ を  $N$  次元の実数ベクトルとすると、 $Cx, C_1 x$ もそれぞれ  $N$  次元の実数ベクトルとなり、それぞれの第  $i$  要素は  $\sum_{j=1}^N Cov(Z_{it}, Z_{jt})x_j$ 、 $\sum_{j=1}^N Cov(Z_{it}, Z_{j,t-1})x_j$ となる。式(9)-(10)をこれらと比較すれば、共分散作用素、1 次の自己共分散作用素がそれぞれ多変量時系列の場合の行列 $C, C_1$ の関数時系列バージョンであることが分かる。

$Z_t$ と任意の実関数  $x$  の内積  $\langle Z_t, x \rangle$ と $Z_{t-1}$ の積の期待値をとれば  $E[\langle Z_t, x \rangle Z_{t-1}]$ となるが、これは  $C_1 x$ である。これに式(6)を代入すれば、

$$C_1 x = E[\langle \alpha Z_{t-1} + v_t, x \rangle Z_{t-1}] = E[\langle \alpha Z_{t-1}, x \rangle Z_{t-1}] + E[\langle v_t, x \rangle Z_{t-1}] = \alpha E[\langle Z_{t-1}, x \rangle Z_{t-1}] = \alpha C x \quad (11)$$

となり、

$$\alpha = C_1 C^{-1} \quad (12)$$

が得られる（ここで、 $C^{-1}$ は $C^{-1} C x = x$ となる、 $C$ の逆作用素）。 $C$ の固有関数および付随する固有値（ $C \varphi = \lambda \varphi$ を満たす関数 $\varphi$ と $\lambda$ 。 $C$ の性質より $\lambda$ は非負の実数となる。）のペア $(\varphi_1, \lambda_1), (\varphi_2, \lambda_2), \dots$ （ $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ 。 $\{\varphi_j\}$ は正規直交）と表せば、関数解析の基本的な定理により、 $C^{-1} x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-1} \langle x, \varphi_j \rangle \varphi_j$ と表すことができるので、

$$\begin{aligned} \alpha x &= C_1 C^{-1} x = E[\langle Z_t, C^{-1} x \rangle Z_{t+1}] = E \left[ \langle Z_t, \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-1} \langle x, \varphi_j \rangle \varphi_j \rangle Z_{t+1} \right] \\ &= E \left[ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-1} \langle x, \varphi_j \rangle \langle Z_t, \varphi_j \rangle Z_{t+1} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

となる（ $\lambda_p > \lambda_{p+1} = 0$ であれば $\alpha x = E[\sum_{j=1}^p \lambda_j^{-1} \langle x, \varphi_j \rangle \langle Z_t, \varphi_j \rangle Z_{t+1}]$ ）。Bosq (2000)は $\alpha$ の推定量として、式(13)の標本バージョンである次の Yule-Walker 型推定量を提案した：

$$\hat{\alpha} x = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{j=1}^p \hat{\lambda}_j^{-1} \langle x, \hat{\varphi}_j \rangle \langle Z_t, \hat{\varphi}_j \rangle Z_{t+1} \quad (14)$$

ここで、 $(\hat{\varphi}_j, \hat{\lambda}_j)$ は、 $C$ の標本バージョン、

$$\hat{C} x = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \langle Z_t, x \rangle Z_t \quad (15)$$

の固有関数、固有値のペアである（ $\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \dots \geq \hat{\lambda}_p > 0$ ）。 $j$ が大きくなるにつれ $\lambda_j$ はゼロに近づいていくので、 $p$ を大きくとった場合、その推定誤差が $\hat{\alpha}$ へ及ぼす影響は甚大である（式(14)の右辺には逆数 $\hat{\lambda}_j^{-1}$ として入っていることに注意）。そのため、実際には $p$ には小さな整数値が当てられる。なお、 $C_1, C^{-1}$ のそれぞれの標本バージョン、

$$\widehat{C}_1 x = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} \langle Z_t, x \rangle Z_{t+1}, \quad \widehat{C}^{-1} x = \sum_{j=1}^p \hat{\lambda}_j^{-1} \langle x, \hat{\varphi}_j \rangle \hat{\varphi}_j \quad (16)$$

を用いれば、式(14)の右辺は $\widehat{C}_1 (\widehat{C}^{-1} x)$ となるので、 $\hat{\alpha} x$ が「Yule-Walker 型」推定量であることが分かる。さらに、式(14)の $Z_{t+1}$ を平滑化する近似式 $Z_{t+1} \approx \sum_{j=1}^p \langle Z_{t+1}, \hat{\varphi}_j \rangle \hat{\varphi}_j$ で置き換えれば、

$$\hat{\alpha} x = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^p \hat{\lambda}_j^{-1} \langle x, \hat{\varphi}_j \rangle \langle Z_t, \hat{\varphi}_j \rangle \langle Z_{t+1}, \hat{\varphi}_i \rangle \hat{\varphi}_i \quad (17)$$

となる。 $Z_{k+1}$ の予測（推定した AHR(1) にフィットした関数 $\hat{\alpha} Z_k$ ）は、

$$\hat{Z}_{k+1} = \hat{\alpha} Z_k = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^p \hat{\lambda}_j^{-1} \langle Z_k, \hat{\varphi}_j \rangle \langle Z_t, \hat{\varphi}_j \rangle \langle Z_{t+1}, \hat{\varphi}_i \rangle \hat{\varphi}_i \quad (18)$$

となる。ここで、

$$\hat{\alpha}(s, u) \equiv \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^p \hat{\lambda}_j^{-1} \langle x, \hat{\varphi}_j \rangle \langle Z_t, \hat{\varphi}_j \rangle \hat{\varphi}_j(u) \hat{\varphi}_i(s) \quad (19)$$

と置けば、

$$\hat{Z}_{k+1}(s) = \int \hat{a}(s, u) Z_k(u) du \quad (20)$$

となり、翌日  $k+1$  日の時刻  $s$  の値  $Z_{k+1}(s)$  予測値として、関数の今日のすべての時刻における実現値  $Z_k(u)$  の加重和（重みは  $\hat{a}(s, u)$ ）を用いていることが分かる。

前述の  $0 = \omega - m + \alpha m$  の関係より、残る  $\omega$  の推定には、

$$\hat{\omega} = \hat{m} - \hat{\alpha} \hat{m}, \quad \hat{m} = T^{-1} \sum_{t=1}^T Y_t^2 \quad (21)$$

を用いることができる（これまで通り、 $\hat{\alpha}$  は作用素、 $\hat{m}$ 、 $Y_t^2$  は時刻の関数であることに注意）。また、スポット・ボラティリティ・パスの推定・予測には

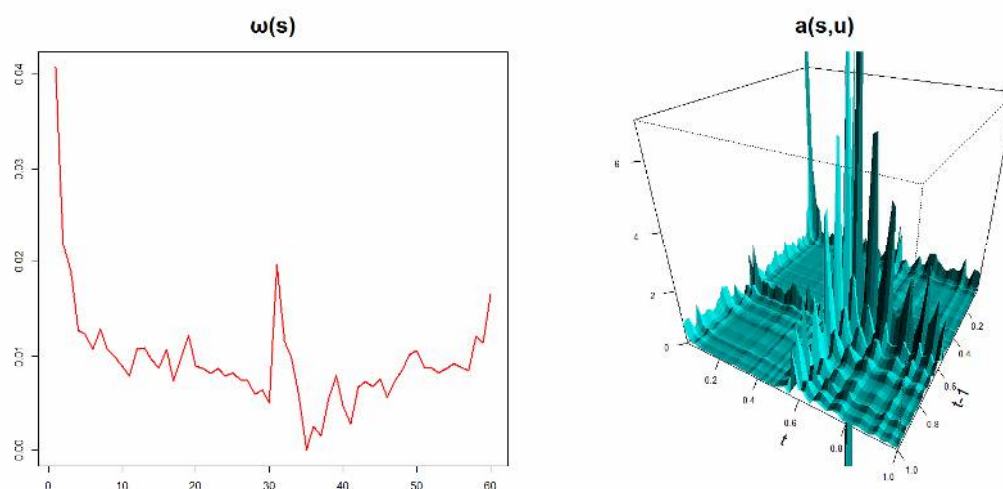
$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \hat{\omega} + \hat{\alpha} Y_t^2 \quad \left( \text{つまり、} \hat{\sigma}_{t+1}^2(s) = \hat{\omega}(s) + \int \hat{a}(s, u) Y_t^2(u) du \right) \quad (22)$$

を用いることができる（Hörmann et al. 2013）。

#### 4. 日経平均データへの応用

本節では、第1節で説明した日経平均株価5分間リターンのデータに関数ARCH(1)に適用した結果を紹介する。 $h=5$ 分、 $[s_0, s_1] = [0, 1]$ （[9:00, 15:00]を標準化、昼休みは時間の経過0として無視した）、 $p=2$ として、 $\omega(s), a(s, u)$ をYule-Walker型推定量（式(19), (21)）により推定した結果を図2に示した。左パネルに示した切片  $\hat{\omega}(s)$  は、図1右パネルと同様に、前場・後場の開始・終了近くでスポット・ボラティリティが高いというよく知られた日経平均株価の実証的特徴を捉えている。右パネルの  $\hat{a}(s, u)$  は、 $t$ 日時刻  $u$  の瞬間的リターンが翌  $t+1$ 日時刻  $u$  のスポット・ボラティリティに与える影響を推定したものであるが、プロットを真上から見れば漢字の「田」の形になっている<sup>5</sup>。そのまま正しいものとして解釈すれば、(1) 今日の前場・後場の開始・終了近くの瞬

図2: 日経平均株価の関数ARCH(1)モデル推定結果  $p=2$



<sup>5</sup> 図は値の上限を7として表示しているが、これを超える部分がある。

間的リターン 2 乗の大きな値が翌日のスポット・ボラティリティに比較的大きな影響を与える、

(2) 翌日の前場・後場の開始・終了近くのスポット・ボラティリティは今日の全時刻の瞬間的リターン 2 乗に特に大きな影響を受ける、(3) 今日の後場の瞬間的リターン 2 乗の翌日後場のスポット・ボラティリティが大きいことになる。

なお、詳細は省略するが、関数 ARCH (1)モデルによるスポット・ボラティリティ日次パスの推定精度は、 $\hat{m}(s) = T^{-1} \sum_{t=1}^T Y_t^2(s)$  (式 21) による予測 (つまりスポット・ボラティリティは時刻の決定論的関数としては変化するが、日をまたぐ同時帯では値は変わらないとする予測) よりも RMSE 基準において上回った。ただし、関数 ARCH (1) モデルの有用性を示すためには、スポット・ボラティリティ日次パス分析の他のアプローチ (例えば、日次 RV の ARFIMA モデル等により日次レベルのボラティリティ変動を捉え、それに日周期性モデルにより日内変動の調整を行う) との比較等が必要になる。

## おわりに

本稿では資産価格のスポット・ボラティリティの日次パスの推定・予測のために有用である可能性のある関数 ARCH モデルについて説明した。日経平均株価の実データへの適用結果も簡単に紹介したが、これは関数 ARCH (1)モデルを用いたごく簡単な応用例にすぎない。関数 ARCH/GARCH アプローチのフル・ポテンシャルを試すような理論・実証面での今後の展開が期待されるところである。

## 参考文献

- Aue, A., L. Horváth, & D. Pellatt (2015) Functional generalized autoregressive conditional heteroscedasticity. arXiv:1509.03813v2.
- Bollerslev, T. (1986) Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity. *J. Econometrics* 31, 307-327.
- Bos, C. (2012) Spot variance path estimation and its application to high-frequency jump testing. *J. Financial Econometrics* 10, 354-389.
- Bosq, D. (2000) *Linear processes in Function Spaces*. Springer.
- Hörmann, S., L. Horváth, & R. Reeder (2013) A functional version of the ARCH model. *Econometric Theory* 29, 267-288.
- Horváth, L., & P. Kokoszka (2012) *Inference for Functional Data with Applications*. Springer.
- 福水健二 (2010) 『カーネル法入門—正定値カーネルによるデータ解析—』朝倉書店。

本資料に関する著作権は、株式会社大阪取引所にあります。

本資料の一部又は全部を無断で転用、複製することはできません。

本資料は、デリバティブ商品の取引の勧誘を目的としたものではありません。