

## 日経 225 先物と日経 225mini の切断実現ボラティリティの推定

東京経済大学経営学部教授 吉田靖

### 1. はじめに

高頻度データにより実現ボラティリティを計測して、リスク管理やオプション価格モデルに用いるための多くの研究がなされているが、実現ボラティリティの計測には、マーケット・マイクロストラクチャー・ノイズの存在が問題となる。具体的な発生要因としては、売り気配と買い気配の間で約定価格が変動するために起きるビット・アスク・バウンスがある。このようなマーケット・マイクロストラクチャー・ノイズを除去するために、推計に使用するモデルの工夫と、データの観測頻度を調節したり自己相関を取り除いたりすることにより、使用目的に最も適しているものを実証的に探索する方法が用いられていることが多い。

もう一つのマーケット・マイクロストラクチャー・ノイズの発生要因に、価格の不連続性がある。例えば約定価格は、市場で定められた呼値の単位により、連続的な値を取ることができない。また、売り気配と買い気配の仲値を用いた場合でも、提示する価格は呼値の単位に従うことから、離散的な変動となる。このような呼値の単位が存在することによる価格やリターンに離散的な変動を明示的に取り入れたモデルは、Campbell, Lo, and MacKinlay(1997)に紹介されている。このほかにも、Bessembinder (2003)のように呼値の単位が変更されたときの、市場の流動性の変化を計測している研究も存在する。

このように呼値は重要な問題ではあるが、日本の先物市場に関して価格変動のジャンプと呼値の関係を扱っている研究は少ない。柴田 (2008) は日経平均株価、日経 225 先物、東証株価指数 (TOPIX) を対象とし、Andersen, Bollerslev and Diebold(2006)の HAR-RV-J モデルによりジャンプの存在などを検証した結果、日経 225 先物は日経平均株価指数と TOPIX よりもジャンプの頻度が高いとしている。しかし、例えば日経 225 先物は呼値の単位が 10 円であるのに対し、日経平均株価は 100 分の 1 円単位で変動可能であることについては言及されていない。

価格の変動にジャンプの存在を前提としたとき、ブラウン運動の成分とジャンプの成分に分離し、それぞれのパラメータを計測できれば、より精緻な分析を行うことが期待できる。Mancini(2001)は実現ボラティリティ計測の際に閾値を設けて、その閾値より絶対値が大きい変動はジャンプによるものとして除外し、変動の絶対値が閾値内の変動であれば、ブラウン運動によるものとする計測方法を提案している。同時期に Shimizu(2002)も閾値を用いる方法を Mancini(2001)とは独立に提案している。このような閾値を設定する推計方法を Ait-Sahalia and Jacod(2012)は切断実現ボラティリティ(truncated realized volatility)とし、ニューヨークダウ構成銘柄について検証し、さらに Ait-Sahalia and Jacod(2014)は、閾値と観測時間間隔の関係を考慮した計測方法を提案している。しかし、これらの研究で

は呼値の存在を考慮していないことが多く、Aït-Sahalia and Jacod(2012)は実データで計測しているが、実証研究は重要であるものの少ない。したがって、本稿では Aït-Sahalia and Jacod(2014)が提案している方法で大阪取引所の日経平均株価を取引対象としている先物のデータにより実証分析を行ない、問題を探る。

## 2. 計測方法

本節では、Aït-Sahalia and Jacod(2012)の表記方法などを使用してその検証方法を簡潔に紹介する。

まず、 $X_t$ を時刻  $t$ における証券価格の対数値とし、次のような確率過程に従っているとする。

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t + dJ_t$$

ここで、第1項は単位時間あたり  $b_s$ で成長するドリフト項であり、第2項の  $W$ は標準ブラウン運動で  $\sigma_s$ をボラティリティとする連続的な確率変動である。第3項はジャンプを表している。

実証分析に際しては、実際の証券価格について観測時間間隔  $\Delta_n$ による第  $i$ 番目の対数差分を次式で定義する。

$$\Delta_i^n X = X_{i\Delta_n} - X_{(i-1)\Delta_n}$$

全ての対数差分データを用いた実現ボラティリティは、次式により定義される。

$$\hat{C}(\Delta_n)_t = \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} (\Delta_i^n X)^2$$

ここで  $[\ ]$ は、この括弧内の実数の整数部分を意味する。

これに対して、 $\Delta_i^n X$ のうちジャンプによるものをできるだけ捨ててブラウン運動によるもののみを算出対象にし、ブラウン運動によるボラティリティを正確に計測しようとするものが切断実現ボラティリティであり、次式で定義される。

$$\hat{C}(\Delta_n, u_n)_t = \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} (\Delta_i^n X)^2 1_{\{|\Delta_i^n X| \leq u_n\}}$$

ここで、 $1_{\{\cdot\}}$  は括弧内の条件が成り立つときは1、そうでないときは0の値を取るものがあり、 $u_n$ は閾値で正の定数である。すなわち、 $\Delta_n^2 X$ のうち、その絶対値が $u_n$ 以下のもののみを加算してボラティリティを算出するものである。 $u_n$ の決定にあたっては Ait-Sahalia and Jacod(2014)の方法に従うこととする。

### 3. データ

対象とする銘柄は日経平均株価を対象とする先物である大阪取引所の日経 225 先物と日経 225mini の 2011 年 12 月限で、2011 年 9 月 8 日から 2011 年 12 月 7 日までの 60 営業日のイントラデイのデータを使用する。大阪取引所には、日経平均株価を対象とするこれら 2 商品が上場されているが、日経 225 先物の呼値の単位は 10 円であるのに対し、日経 225mini は 5 円である。また日経 225 先物は、取引単位は 1000 倍であるが、日経 225mini は 100 倍である。両者の取引金額を比較すると図 1 のように 2011 年半ば以降は拮抗している。この要因としては、デリバティブ売買システムが 2011 年 2 月 14 日に更新されて、高頻度取引が行いやすくなったため、呼値の単位が小さいことにより取引コストが小さい日経 225mini に取引が移ってきている可能性もあろう。このように、2 商品間取引金額はほぼ同じで、対象とする指数も同一であり、呼値の違いによる影響を分析するには適した状況であり、世界的にも取引金額の大きい重要な先物であるので、分析対象とする意義は大きいと考えられる。

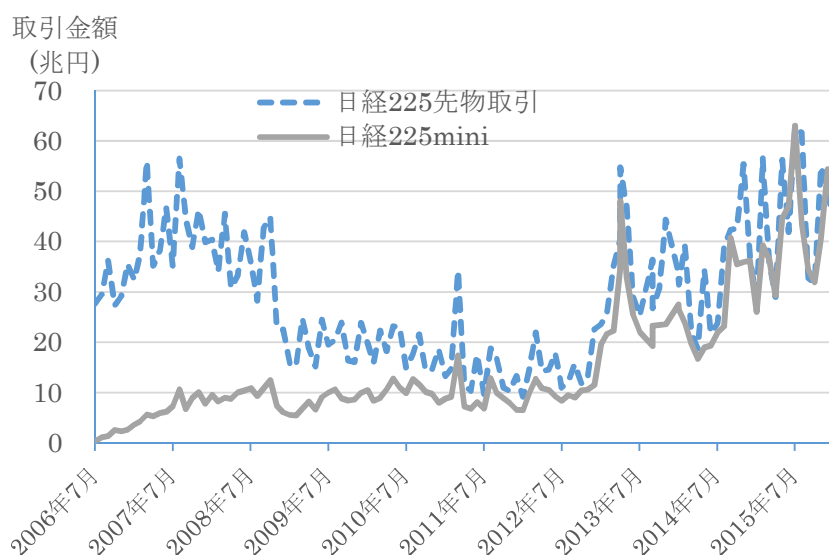


図 1 日経 225 先物と日経 225mini の取引金額の推移  
出所：大阪取引所

価格は最良気配値から算出するが、単純な仲値ではなく、次式で定義される Gatheral and Oomen(2010)のマイクロ・プライス (micro-price) を使用する。

$$p_v = \frac{v_a p_b + v_b p_a}{v_a + v_b}$$

ここで、 $p_v$  はマイクロ・プライス、 $v_a$  は最良売り気配の数量、 $v_b$  は最良買い気配の数量、 $p_a$  は最良売り気配値、 $p_b$  は最良買い気配値であり注文量で加重したものとなっている。Aït-Sahalia and Jacod(2012)は約定データおよび最良気配値による仲値を用いており、本稿とは異なっている。

本稿の最短の観測時間間隔は5秒であり、Aït-Sahalia and Jacod(2012)も5秒間が最短であるがその間の平均価格を算出している。一方本稿は不連続な変動をより検出しやすくするために、対象の5秒間の中で最後に更新されたデータを使用する。5秒間にデータの更新がなかった場合は前値と同じ価格を使用し、このときのリターンはゼロとなる。その他の観測時間間隔での価格はこの5秒間隔のデータを間引くことにより算出し、観測時間間隔は、5秒、10秒、15秒、20秒、30秒、45秒、60秒、90秒、120秒、180秒、240秒、300秒、420秒、600秒、900秒、1200秒、1800秒の17パターンとする。

#### 4. 計測結果

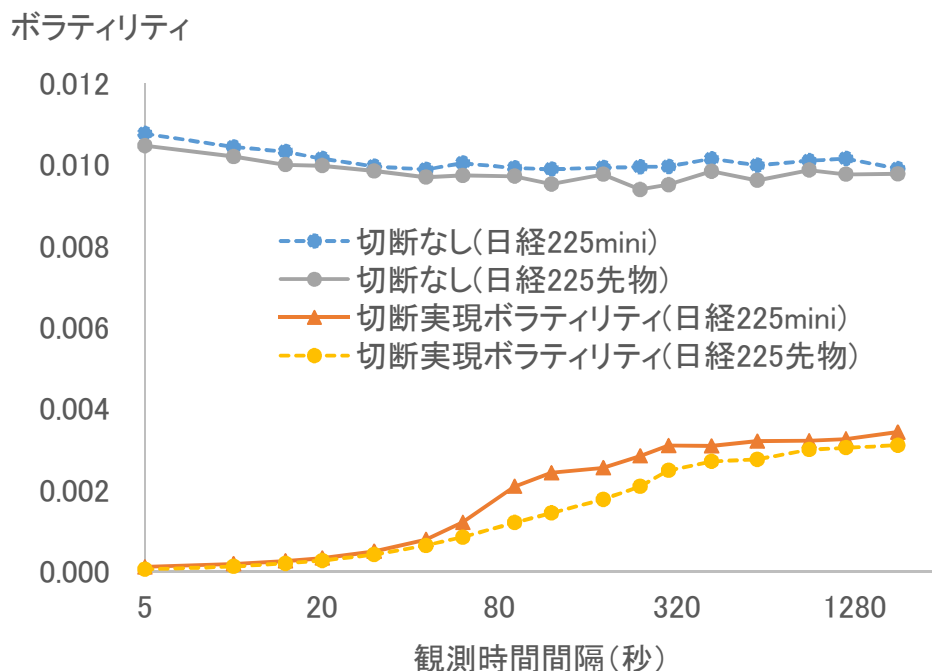


図2 ボラティリティと観測時間間隔

図2に計測結果を示す。横軸は観測時間間隔であり対数メモリとなっている。

まず、全てのデータを用いた実現ボラティリティと切断実現ボラティリティを比較する。切断実現ボラティリティが、ブラウン運動のボラティリティをより正確に推定できているとすれば、図に示すように2商品共にデータを全て用いて計測したボラティリティ（図では「切断なし」と表示）にはジャンプの成分が多く含まれていることになる。約5分を超える領域では両者ともほぼ横這いであるが、観測時間間隔が短い領域では、間隔が短いほど切断実現ボラティリティが減少する一方で、データを全て用いて計測したボラティリティは大きくなっており、この原因は今後の課題であるが、本稿で使用した閾値の設定方法が影響している可能性もある。

次に、日経225先物と日経225miniを比較すると、全てのデータを用いた実現ボラティリティでは、全ての観測頻度において日経225miniの方が若干大きくなっているのに対して、切断実現ボラティリティでは逆に日経225先物が全ての観測頻度において大きくなっている。

以上の現象が観測される要因としては、日経225先物の方が短い観測時間間隔では一つ前の観測時刻と同じ価格になることが日経225miniより多いことに起因してゼロリターンとなる比率が高くなっていることが考えられるが、その明確な影響のメカニズムは現時点では不明である。さらに、観測時間間隔が長い領域でも同様の現象が発生しているため、呼値が異なることの影響や、閾値の設定アルゴリズムの影響なども考えられる。

## 5. おわりに

本稿は大阪取引所の日経225先物および日経225miniの2011年12月限の2011年9月8日から2011年12月7日までの60営業日のイントラデイのデータを使用して、Aït-Sahalia and Jacod(2014)の方法で切断実現ボラティリティを計測した。その結果、従来のブラウン運動とジャンプを区別しない推計方法では得られなかったブラウン運動部分のボラティリティの推計値を得ることができ、価格変動に占めるジャンプ部分の割合が大きいことが観測された。また日経225先物と日経225miniでは切断実現ボラティリティの値が異なる結果となったが、この原因の分析と切断実現ボラティリティを計測するための閾値の設定などは今後の課題である。

## 謝辞

本稿は統計数理研究所共同プログラム(28-共研1004)、科研費(15H03402)および東京経済大学共同研究助成D15-01の助成を受けたものである。

## 参考文献

Aït-Sahalia, Y. and Jacod J. (2012). Analyzing the spectrum of asset returns: Jump and volatility components in high frequency data, *Journal of Economic Literature* 50(4), 1007-1050.

- Aït-Sahalia, Y. and Jacod J. (2014). High Frequency Financial Econometrics, Princeton University Press, New Jersey.
- Andersen, T. G., Bollerslev, T, Diebold, F. X., (2006). Roughing it up: Including jump components in the measurement, modeling and forecasting of return volatility, *Review of Economics and Statistics*, 89(4), 701-720.
- Bessembinder, H. (2003). Trade Execution Costs and Market Quality after Decimalization, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 38, No. 4, 747-777.
- Campbell, J.Y., Lo, A. W., and MacKinlay, A. C. (1997). Chapter 3 Market Microstructure, *The Economics of Financial Markets*, Princeton University Press.
- Gatheral, J. and Oomen, R.C.A. (2010). Zero-intelligence realized variance estimation, *Finance and Stochastic* 14(2), 249-283.
- Mancini, C. (2001). Disentangling the jumps of the diffusion in a geometric jumping brownian motion, *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, 64(1), 19-47.
- 柴田舞(2008). 高頻度データによるボラティリティの推定： Realized volatility のサーベイと日本の株価指数および株価指数先物の実証分析, *金融研究*, 27(1), 1-54.
- Shimizu, Y. (2002). Estimation of diffusion processes with jumps from discrete observations, Zenkin Tenkai, University of Tokyo, Master thesis.

本資料に関する著作権は、株式会社大阪取引所にあります。

本資料の一部又は全部を無断で転用、複製することはできません。

本資料は、デリバティブ商品の取引の勧誘を目的としたものではありません。