先物・オプションレポート 2016 年 11 月号

日経 225 分散リスク・プレミアムの予測力

一橋大学経済研究所教授 渡部敏明

1 はじめに

資産価格の将来のリターンの分散の危険中立測度 (risk neutral measure) の下での期待値と実測度 (physical measure) の下での期待値の差は「分散リスク・プレミアム」と呼ばれ[1]、将来の株価や景気変動などに対して予測力を持つことが明らかになっている (Bollerslev et al. (2009, 2014)、Ubukata and Watanabe (2014a))。本稿では、日経 225 の分散リスク・プレミアムが日経 225 の超過リターンや日本の鉱工業生産指数に対して予測力を持つかどうか実証分析を行う。

危険中立測度の下での分散の期待値は、オプション価格からインプライド・ボラティリティとして計算できる。インプライド・ボラティリティの計算には古くはブラック・ショールズ・モデルを用いていたが、このモデルは満期までのボラティリティを一定と仮定するので、最近では VIX のようなブラック・ショールズ・モデルを使わないモデル・フリー・インプライド・ボラティリティを用いる。本稿では、大阪大学数理・データ科学教育研究センター（旧金融・保険教育研究センター) が計算している日経 225 オプション価格のモデル・フリー・インプライド・ボラティリティVolatility Index Japan (VXJ) を用いている。

近年、実測度の下での分散は日中の資産価格の高頻度データを用いて実現分散 (Realized Volatility; 以下 RV) として推定することが多い。Bollerslev et al. (2009, 2014) では、実測度の下での分散の期待値を 1 期前の RV としているが 、これが正しいのは実現分散がランダム・ウォークに従う場合だけである。RV の変動を表すのによく用いられるモデルに、Corsi (2009) の提案した HAR (heterogeneous autoregressive) モデルがあり、このモデルは Andersen et al. (2007) や Bekaert and Hoerova (2014) で改良されている。本稿では、Bekaert and Hoerova (2014) のモデルを用いて実測度の下での分散の期待値を計算することにより、分散リスク・プレミアムの予測力が高まるかどうかに注目する。

本稿の構成は以下の通りである。まず第 2 節で HAR モデルとその拡張について説明し、第 3 節で本稿で用いたデータと Bekaert and Hoerova (2014) のモデルの推定結果を説明する。第 4 節で日経 225 の分散リスク・プレミアムを計算し、それが日経 225 の超過リターンや日本の鉱工業生産指数に対して予測力を持つかどうか実証分析を行う。最後に、第 5 節で今後の研究課題について述べる。

---

*本稿は生方雅人氏（釧路公立大学）との共同研究に基づいている。また、本研究は一橋大学社会科学高等研究院および科学研究費基盤研究 (A) 26245028 より助成を受けている。

[1]分散リスク・プレミアムについては、渡部 (2013) も参照されたい。分散リスク・プレミアムの理論的な分析については、Bollerslev et al. (2009)、Drechsler and Yaron (2011)、Barndorff-Nielsen and Veraart (2013) を参照されたい。

2 HAR モデル

近年、実測度の下でのリターンの分散は日中リターンを用いて RV として推定することが多い。RV について詳しくは、渡部 (2007) を参照されたい。$\mathrm{RV}_t^{(1)}$ を第 t 日の RV とし、$\mathrm{RV}_t^{(k)}$ を以下のように定義する。

$$\mathrm{RV}_t^{(k)} = \frac{22}{k}\sum_{i=1}^{k} \mathrm{RV}_{t-i+1}^{(1)}. \tag{1}$$

これは、$k=5$ の場合は週次 RV、$k=22$ の場合は月次 RV に対応する。

VIX などのモデル・フリー・インプライド・ボラティリティが 1 か月の分散の期待値として計算されているので、分散リスク・プレミアムは、通常、将来の月次分散の危険中立測度の下での期待値と実測度の下での期待値の差として計算される。Bollerslev et al. (2009, 2014) は実測度の下での月次分散の期待値を、

$$\mathrm{E}_t\left[\mathrm{RV}_{t+22}^{(22)}\right] = \mathrm{RV}_t^{(22)} \tag{2}$$

としているが、これは月次 RV がランダム・ウォークに従っていれば正しいが、そうでなければ正しくない。

RV の変動を表すモデルとしてよく用いられるものに、Corsi (2009) によって提案された HAR モデルがある。このモデルは、市場には様々な投資期間を持つ投資家がいるので、日次 RV の説明変数に過去の日次 RV だけでなく、過去の週次 RV や月次 RV を加える (詳しくは、渡部 (2007) を参照されたい)。将来の月次分散の期待値を求めたい場合には、被説明変数を月次 RV にした以下のモデルを用いる。

$$\ln \mathrm{RV}_t^{(22)} = c + \beta^m \ln \mathrm{RV}_{t-22}^{(22)} + \beta^w \ln \mathrm{RV}_{t-22}^{(5)} + \beta^d \ln \mathrm{RV}_{t-22}^{(1)} + \epsilon_t. \tag{3}$$

ここで、ϵ_t は誤差項を表す。(3) 式では RV の自然対数を取っているが、対数を取らないモデルもある。対数を取った方が ϵ_t の分布が正規分布に近くなるので、ここでは対数を取ったモデルだけを考える。

Andersen et al. (2007) は、説明変数の $\mathrm{RV}_{t-22}^{(k)}$ $(k=1,5,22)$ を連続的なボラティリティ $C_{t-22}^{(k)}$ と非連続的なジャンプ $J_{t-22}^{(k)}$ に分けて、以下のように、それぞれ別々に説明変数に加えることにより、RV の予測力が高まることを示している。

$$\begin{aligned}\ln \mathrm{RV}_t^{(22)} =& c + \beta^m \ln C_{t-22}^{(22)} + \beta^w \ln C_{t-22}^{(5)} + \beta^d \ln C_{t-22}^{(1)} \\ &+ \gamma^m \ln(1+J_{t-22}^{(22)}) + \gamma^w \ln(1+J_{t-22}^{(5)}) + \gamma^d \ln(1+J_{\tau-22}^{(1)}) + \epsilon_t.\end{aligned} \tag{4}$$

株式市場では過去のリターンが正か負かでボラティリティ変動に非対称性があることが知られている (渡部 (2000) を参照されたい)。そこで、Bekaert and Hoerova (2014) はそうしたボラティリティ変動の非対称性を考慮し、さらに説明変数に VIX を加えた以下のモデルを用いて

いる。

$$
\begin{aligned}
\ln \mathrm{RV}_t^{(22)} =& c + \alpha \ln \mathrm{VIX}_{t-22}^2 + \beta^m \ln C_{t-22}^{(22)} + \beta^w \ln C_{t-22}^{(5)} + \beta^d \ln C_{t-22}^{(1)} \\
& + \gamma^m \ln(1 + J_{t-22}^{(22)}) + \gamma^w \ln(1 + J_{t-22}^{(5)}) + \gamma^d \ln(1 + J_{t-22}^{(1)}) \\
& + \delta^m R_{t-22}^{(22)-} + \delta^w R_{t-22}^{(5)-} + \delta^d R_{t-22}^{(1)-} + \epsilon_t.
\end{aligned} \tag{5}
$$

ここで、R_t を日次リターンとすると、$R_t^{(k)-} = \min\left[\frac{22}{k}\sum_{i=1}^{k} R_{t-i+1}, 0\right]$ である。説明変数に $R_t^{(k)-}$ $(k = 1, 5, 22)$ を加えることにより、ボラティリティ変動の非対称性を考慮している。

3　データと推定結果

日次 RV の計算は以下のように行った。まず日経 NEEDS ティックデータから日経 225 の前場と後場の 5 分ごとの値を抽出し、その対数階差 (%) を 2 乗して 1 日分合計する。それだけだと昼休みと夜間を無視しており、1 日のボラティリティを過小評価するので、Hansen and Lunde (2005) の方法により調整した。また、それを Barndorff-Nielsen and Shephard (2006) の方法により、連続的なボラティリティと非連続的なジャンプに分けた。その際、統計的に有意なジャンプを抽出するための有意水準は 0.1%とした。

(5) 式の VIX の 2 乗には、大阪大学数理・データ科学教育研究センター（旧金融・保険教育研究センター) が日経 225 オプション価格からモデル・フリー・インプライド・ボラティリティとして計算している Volatility Index Japan (VXJ) を 2 乗し 12 で割ったものを用いた。モデル・フリー・インプライド・ボラティリティの計算ではオプション価格を権利行使価格で積分する必要があるが、VIX や日経 VI では市場で取引されているオプションだけを使って総和で近似している (渡部 (2013) を参照されたい)。市場ではそれほど多くの異なる権利行使価格のオプションが取引されているわけではないので、この方法だと近似誤差が大きくなる可能性がある。そこで、Jiang and Tian (2005, 2007) は、取引されていない権利行使価格を補間・補外する方法を提案しており、VXJ はこの方法に基づいて計算されている。VXJ について詳しくは、 Fukasawa et al. (2011) を参照されたい。

標本期間は 1998 年 1 月 5 日から 2014 年 6 月 30 日までである。まず、すべての標本を用いて、最小 2 乗法により、(5) 式のパラメータの推定を行った。結果は表 1 の通りである。上段が各パラメータの推定値であり、下段の括弧の付いた数値は t 値である。(5) 式の誤差項 ϵ_t は $t-21$ 日から t 日までのショックを表すので、誤差項に自己相関が生じる。そこで、t 値は Newey and West (1987) の方法によって計算した。VIX や連続的なボラティリティは有意水準 5%ですべて有意であるが、ジャンプは月次が有意水準 10%で有意でなく、ボラティリティの非対称を捉える $R_t^{(k)-}$ $(k = 1, 5, 22)$ は月次 $(k = 22)$ と週次 $(k = 5)$ が有意水準 10%で有意でない。以下の分析ではこれらの有意でない説明変数は除いた。

表 1: (5) 式のパラメータの推定結果

α	β^m	β^w	β^d	γ^m	γ^w	γ^d	δ^m	δ^w	δ^d
0.204	0.185	0.285	0.105	0.040	0.040	0.015	0.005	-0.002	-0.001
(2.461)	(2.205)	(4.876)	(5.662)	(0.713)	(1.784)	(1.746)	(0.811)	(-1.513)	(-3.464)

4　分散リスク・プレミアムの予測力

次に、1999 年 12 月から 2014 年 6 月までの各月末の分散リスク・プレミアムを計算した。具体的には、各月末において、それまでの 449 の標本を用いて、最小 2 乗法により (5) 式のパラメータを推定し、誤差項 ϵ_t の分布を正規分布と仮定して、実測度の下での分散の期待値を以下のように計算した。

$$\mathrm{E}_t[\mathrm{RV}_{t+22}^{(22)}] = \exp\left(\mathrm{E}_t[\ln \mathrm{RV}_{t+22}^{(22)}] + \frac{1}{2}\mathrm{var}_t[\ln \mathrm{RV}_{t+22}^{(22)}]\right). \tag{6}$$

ここで、$\hat{\epsilon}_t$ を (5) 式の残差とすると、$\mathrm{E}_t[\ln \mathrm{RV}_{t+22}^{(22)}] = \ln \mathrm{RV}_{t+22}^{(22)} - \hat{\epsilon}_{t+22}$, $\mathrm{var}_t[\ln \mathrm{RV}_{t+22}^{(22)}]$ を残差分散とした。VXJ を 2 乗し 12 で割ったものから上記のように計算した実測度の下での分散の期待値を引くことにより、分散リスク・プレミアムを計算した。

こうして計算した各月末の分散リスク・プレミアムを用いて、まず、日経 225 の分散リスク・プレミアムの日経 225 の超過リターンに対する予測力について分析する。Bollerslev et al. (2009, 2014) に従い、日経 225 の h か月先までの超過リターン $\mathrm{ER}_{\tau+1:\tau+h}$ を被説明変数、分散リスク・プレミアム VRP_τ を説明変数として以下の回帰を行った。

$$\mathrm{ER}_{\tau+1:\tau+h} = a_1 + b_1 \mathrm{VRP}_\tau + u_{1,\tau+h}. \tag{7}$$

ここで、ER_j を j 期の月次超過リターンとすると、$\mathrm{ER}_{\tau+1:\tau+h} = \frac{1}{h}\sum_{j=\tau+1}^{\tau+h} \mathrm{ER}_j$ であり、月次超過リターンは日経 225 の各月末の終値の対数階差から無担保コールレート (オーバーナイト) を引いて計算した。比較のため、実測度の下での分散の期待値を 1 か月前の RV として分散リスク・プレミアムを計算した場合についても同様の回帰を行った。ただし、この場合の RV は 1 分ごとのリターンを用いて計算した実現カーネル (Realized Kernel) とした。実現カーネルについて詳しくは、Barndorff-Nielsen et al. (2008, 2009)、Ubukata and Watanabe (2014b) を参照されたい。結果は表 2 の通りである。そこでも、t 値は Newey and West (1987) の方法によって計算した。b_1 の値は正であると予想され、実測度の下での分散の期待値を 1 か月前の RV にした場合には、$h = 1$ 以外で正の推定値が得られているが、統計的に有意ではない。また、自由度修正済み決定係数も低い。実測度の下での分散の期待値を (5) 式から計算した場合は推定値がすべて負になっている。決定係数は実測度の下での分散の期待値を 1 か月前の RV にした場合よりは高くなっているものの、依然として低い。この結果から、日経 225 の分散リスク・プレミアムは、実測度の下での分散の期待値の計算方法によらず、超過リターンに対して予測力を持たないことがわかる。Bollerslev et al. (2014)、Ubukata and Watanabe (2014a) でも同様の結果が得られている。

表 2: 日経 225 の超過リターンに対する予測力

(a) 実測度の下での分散の期待値を 1 か月前の RV にした場合

h	1	2	3	4	5	6
b_1 の推定値	-0.871	0.398	0.583	0.205	0.123	0.072
t 値	-0.435	0.274	0.384	0.140	0.088	0.054
自由度修正済み決定係数 (%)	-0.47	-0.54	-0.56	-0.46	-0.57	-0.58

(b) 実測度の下での分散の期待値を (5) 式から計算した場合

h	1	2	3	4	5	6
b_1 の推定値	-0.955	-0.536	-1.247	-1.453	-1.070	-0.536
t 値	-0.641	-0.538	-1.586	-2.068	-1.246	-0.560
自由度修正済み決定係数 (%)	-0.43	-0.50	0.01	0.40	0.05	-0.39

次に、日経 225 の分散リスク・プレミアムの日本の景気変動に対する予測力について分析するために、日本の鉱工業生産指数 (IIP) の h か月先までの変化率を $\Delta\mathrm{IIP}_{\tau+1:\tau+h}$ を被説明変数として同様の回帰

$$\Delta\mathrm{IIP}_{\tau+1:\tau+h} = a_2 + b_2\mathrm{VRP}_\tau + u_{2,\tau+h}. \tag{8}$$

を行った。ここで、$\Delta\mathrm{IIP}_j$ を j 期と $j-1$ 期の月次 IIP の対数階差 (%) とすると、$\Delta\mathrm{IIP}_{\tau+1:\tau+h} = \frac{1}{h}\sum_{j=\tau+1}^{\tau+h}\Delta\mathrm{IIP}_j$ である。結果は表 3 の通りである。b_2 の値は負であると予想されるが、実測度の下での分散の期待値を 1 か月前の RV にした場合は、$h = 3, \ldots, 6$ で正の推定値が得られている。また、すべての h で統計的に有意でなく、自由度修正済み決定係数も低い。それに対して、実測度の下での分散の期待値を (5) 式から計算した場合には、すべて有意水準 1%で統計的に有意な負の推定値が得られており、自由度修正済み決定係数も高い。このことから、日経 225 の分散リスク・プレミアムは、実測度の下での分散の期待値を 1 か月前の RV にして計算すると日本の景気変動に対して予測力を持たないが、それを (5) 式から計算すると予測力を持つことがわかる。

表 3: 日本の景気変動に対する予測力

(a) 実測度の下での分散の期待値を 1 か月前の RV にした場合

h	1	2	3	4	5	6
b_2 の推定値	-0.015	-0.014	0.015	0.017	0.009	0.005
t 値	-0.217	-0.153	0.158	0.196	0.126	0.076
自由度修正済み決定係数 (%)	-0.55	-0.54	-0.52	-0.48	-0.54	-0.57

(b) 実測度の下での分散の期待値を (5) 式から計算した場合

h	1	2	3	4	5	6
b_2 の推定値	-0.288	-0.291	-0.275	-0.250	-0.193	-0.144
t 値	-3.118	-2.754	-2.744	-2.812	-2.798	-2.888
自由度修正済み決定係数 (%)	10.49	18.43	21.75	22.92	16.39	10.48

5 今後の研究課題

本稿では、HAR モデルを拡張した Bekaert and Hoerova (2014) のモデルを用いて実測度の下での分散の期待値を計算することにより、日経 225 の分散リスク・プレミアムが日本の景気変動に対して予測力を持つことを明らかにした。

その一方で、Bekaert and Hoerova (2014) のモデルを用いて実測度の下での分散の期待値を計算しても、日経 225 の超過リターンに対しては予測力を持たないことが明らかになった。Bollerslev et al. (2014) は、フランス、ドイツ、日本、スイス、オランダ、ベルギー、イギリス、アメリカについて同様の分析を行い（ただし、そこでは実測度の下での分散の期待値を 1 か月前の RV としている）、分散リスク・プレミアムが超過リターンに関して予測力を持たないのは日本だけであることを示している。そこで、今後、なぜ日本だけ分散リスク・プレミアムが超過リターンに関して予測力を持たないのかを明らかにする必要がある。

ここでは実測度の下での分散の期待値の計算に Bekaert and Hoerova (2014) のモデルを用いたが、RV の変動を表すモデルには、他にも実数和分自己回帰移動平均（ARFIMA）モデルや Unobserved Components (UC) モデルなどがある。これらのモデルについては、渡部 (2007)、Ubukata and Watanabe (2014b)、Nagakura and Watanabe (2015) を参照されたい。GARCH モデルや Stochastic Volatility (SV) モデル (渡部 (2000) を参照されたい)、またそれらに RV を加えた Realized GARCH モデル (Hansen et al. (2012)、Watanabe (2012)、Hansen and Huang (2016)) や Realized SV モデル (Takahashi et al. (2009, 2016)) を用いることも可能である[2]。そこで、こうした他のモデルを用いて実測度の下での分散の期待値を計算した場合に、分散リスク・プレミアムの予測力が高まるかどうかも今後分析すべきであろう。

参考文献

Andersen, T. G., Bollerslev, T. and Diebold, F. X. (2007), "Roughing it up: including jump components in the measurement, modeling, and forecasting of return volatility," *Review of Economics and Statistics*, 89(4), 701–720.

Barndorff-Nielsen, O. E., Hansen, P. R., Lunde, A. and Shephard, N. (2008), "Designing realized kernels to measure the ex-post variation of equity prices in the presence of noise," *Econometrica*, 76(6), 1481–1536.

Barndorff-Nielsen, O. E., Hansen, P. R., Lunde, A. and Shephard, N. (2009), "Realized kernel in practice: trades and quotes," *Econometric Journal*, 12(3), C1–C32.

Barndorff-Nielsen, O. E. and Veraart, A. E. D. (2013), "Stochastic volatility of volatility and variance risk premia," *Journal of Financial Econometrics*, 11(1), 1–46.

Bekaert, G. and Hoerova, M. (2014), "The VIX, the variance premium and stock market volatility," *Journal of Econometrics*, 183(2), 181–192.

[2] Conrad and Loch (2015) は MIDAS-GARCH モデルを用いることにより、マクロ経済変数を GARCH モデルに加えて実測度の下での分散の期待値を計算している。

Bollerslev, T., Marrone, J., Xu, L. and Zhou, H. (2014), "Stock return predictability and variance risk premia: statistical inference and international evidence," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 49(3), 633–611.

Bollerslev, T., Tauchen, G. and Zhou, H. (2009), "Expected stock returns and variance risk premia," *Review of Financial Studies*, 22(11), 4463–4492.

Conrad, C. and Loch, K. (2015), "The variance risk premium and fundamental uncertainty," *Economics Letters*, 132(C), 56–60.

Corsi, F. (2009), "A simple approximate long-memory model of realized volatility," *Journal of Financial Econometrics*, 7(2), 174–196.

Drechsler, I. and Yaron, I. (2011), "What's vol got to do with it," *Review of Financial Studies*, 24(1),1-45.

Fukasawa, M., Ishida, I., Maghrebi, N., Oya, K., Ubukata, M. and Yamazaki, K. (2011) "Model-free implied volatility: from surface to index," *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 14(4), 433–463.

Hansen, P. R., Huang, Z. and Shek, H. H. (2012), "Realized GARCH: a joint model of returns and realized measures of volatility," *Journal of Applied Econometrics*, 27(6), 877–906.

Hansen, P. R. and Huang, Z. (2016), "Exponential GARCH modeling with realized measures of volatility," *Journal of Business & Economic Statistics*, 34(2), 269-287.

Hansen, P. R. and Lunde, A. (2005), "A forecast comparison of volatility models: does anything beat a GARCH(1,1)?" *Journal of Applied Econometrics*, 20(7), 873–889.

Jiang, G. J. and Tian, Y. S. (2005), "The model-free implied volatility and its information content," *Review of Financial Studies*, 18(4), 1305–1342.

Jiang, G. J. and Tian, Y. S. (2007), "Extracting model-free volatility from option prices: an examinaion of VIX index," *Journal of Derivatives*, 14(3), 35–60.

Nagakura, D. and Watanabe, T. (2015), "A state space approach to estimating the integrated variance under the existence of market microstructure noise," *Journal of Financial Econometrics*, 13(1), 45–82.

Newey, W. and West, K. (1987), "A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix," *Econometrica*, 55(3), 703–708.

Takahashi, M., Omori, Y. and Watanabe, T. (2009), "Estimating stochastic volatility models using daily returns and realized volatility simultaneously," *Computational Statistics and Data Analysis*, 53(6), 2404–2426.

Takahashi, M., Watanabe, T. and Omori, Y. (2016), "Volatility and quantile forecasts by realized stochastic volatility models with generalized hyperbolic distribution," *International Journal of Forecasting*, 32(2), 437–457.

Ubukata, M. and Watanabe, T. (2014a), "Market variance risk premiums in Japan as predictor variables and indicators of risk aversion," *Empirical Economics*, 47(1), 169–198.

Ubukata, M. and Watanabe, T. (2014b), "Pricing Nikkei 225 options using realized volatility," *Japanese Economic Review*, 65(4), 431–467.

Watanabe, T. (2012), "Quantile forecasts of financial returns using realized GARCH models," *Japanese Economic Review*, 63(1), 68–80.

渡部敏明 (2000)『ボラティリティ変動モデル』朝倉書店.

渡部敏明 (2007)「Realized Volatility–サーベイと日本の株式市場への応用」『経済研究』58(4), 352–373.

渡部敏明 (2013)「モデル・フリー・インプライド・ボラティリティの計算方法について」『先物・オプションレポート』25(7).

渡部敏明 (2014)「分散リスク・プレミアム」『先物・オプションレポート』26(9).