解　説

一般投資家のための
株価指数先物・オプション講座 (9)

第三章　株価指数オプション

1　基礎編 その3

オプション・プレミアム（価格）を算出するための定式化したモデルの代表例を紹介する。現実には，前提条件を設けた上でのモデルであることを頭に入れておくことが肝要であり，モデルの限界があることを認識しておく必要がある。そしてそのモデルは，高度な数学的知識が必要であるが，本講座の主旨からそのモデルの意味あいを理解する程度の説明にとどめておくこととする。

(1) ブラック・ショールズ・モデル（BSモデル）

BSモデルはその提唱者たちの名前をとって呼ばれている。当時シカゴ大学教授のブラック氏とマサチューセッツ工科大学教授のショールズ氏がその提唱者たちである（1973年)。

BSモデルはオプション価格を算出する時に用いられる代表的なモデルである。先にも触れた通り，幾つかの前提条件がある。まずはそのあたりから始めよう。

1）モデルの前提条件とその解釈

前提1　資本市場が完全である。

- 市場は競争的であり，価格は市場から与えられ，投資家はプライス・テイカーである。
- 取引コストや税金は考えない。
- 市場に関する情報はすべての投資家が利用可能で，そのための入手コストはかからない。
- すべての証券は市場性があって無制限に分割可能。

前提2　非危険資産が存在し，投資家は非危険資産の利子率（r）で無制限に借入れ，貸出し可能。

（注）　非危険資産の利子率とは，安全な主体（例えば政府）が発行する債務の利子率を考え，CDや手形レート，ユーロ円金利が実際にはよく用いられる。そして実際には，無制限に借入れ，貸出しは不可能であり，借入れと貸出しの金利は同一水準ではない。

前提3　非危険資産の収益率（r）は時間に関して不変であり，その水準は投資家に既知。

（注）　これは，期中における上記の金利が一定とすることを意味するが，実際には変化しそのような金融資産は存在しない。幸いその利子率が変化してもオプション価格に与える影響は比較的軽微であり，妥協できる範疇であろう。

前提4　原資産の価格（S）の変動パターンは時間的にも価格的にも連続な確率過程に従う。

（注）　これは伊藤プロセスと呼ばれている。（参考）

$$dS=\alpha Sdt+\sigma Sdz$$

α…原資産の瞬間的な正規確率分布の期待収益率

σ…その標準偏差

dS…原資産の微小変化

dt…時間の微小変化

dz…標準正規確率過程

前提5　標準偏差（σ）は一定であり，その値に関して投資家たちの間で意見が一致している。

（注）　期中のボラティリティ（ここでいう標準偏差）が一定であることの意味は，ある過去の時点から現在までの確率分布が現在から満期に至るまでの確率分布と同一であることを前提としており，このような性質を「分布の定常性」と呼んでいる。将来の予測に過去のデータを用いる際の矛盾解決に前提の存在が必要となる。

前提6　原資産に配当はない。

前提7　オプションは満期日においてしか権利行使できない（ヨーロピアン・タイプ)。

2）BSモデル式とその利用

コール・オプション・プレミアム決定式は，

$$C=S\cdot N(d)-K\cdot e^{-rt}N(d-\sigma\sqrt{t})$$

で表される。

この式の意味は，

C＝(権利行使の確率)×(権利行使の条件下でのSの期待値)－(権利行使の確率)× K/(1＋r)

プット・オプション・プレミアム決定式は，

$$P=K\cdot e^{-rt}N(-d+\sigma\sqrt{t})-S\cdot N(-d)$$

考え方は同様であるので省略する。

ただし，N(d) は標準正規分布の累積密度関数で，

$d=\{\ln(S/K)+(r+\sigma^2/2)t\}/\sigma\sqrt{t}$

$Ke=K/(1+r)\ t$　これは，

$(1+r)\ t$について，１年間の利子率繰入回数をnとして繰入れが連続して行われる（nの回数が無限大）とした時の次の性質を利用したもの。

$\lim_{n\to\infty}(1+r/n)^{nt}=e^{rt}$　（参考）

C：コール・オプション・プレミアム

P：プット・オプション・プレミアム

S：現時点における原資産の価格

K：行使価格

t：満期までの期間（年換算）

r：非危険資産の利子率（５％なら0.05）

σ：原資産の価格変動性（ボラティリティ）

BSモデルの導出はこの講座では触れないが，詳しく知りたいならば，書店にならんだオプションの参考書を求められるとよい。

さてBSモデルの式は上記に示したとおりで，それに必要なデータはS，K，t，r，σの５種類である。

では実際にBSモデルを用いて計算してみよう。

S：20,618円

r：0.005（0.5%）

K：20,500円

t：36日（0.09863年）

σ：18.72%（0.1872）

とした時，コール・オプション・プレミアム式にそれらを代入すると，

$\ln S/K=0.00574$ $\{\ln(20618/20500)\}$

$\{r+\sigma^2/2\}\ t=0.002221$

$\sigma\sqrt{t}=0.058791$

$d=0.135411$

$N(d)=0.553856$　N(d)は標準正規累積分布関数

$e^{-rt}=0.999507$　eは自然対数の底で2.718281…

$d-\sigma\sqrt{t}=0.07662$

$N(d-\sigma\sqrt{t})=0.530537$

$d=(0.005740+0.002221)/0.058791=0.135411$

$C=20618\times0.553856-20500\times0.999507\times0.530537$

$=548.8$

３）BSモデルの限界とその他のモデルの紹介（参考）

もう一度BSモデルと現実の世界とのギャップについて整理してみよう。

a　ボラティリティが一定？

実際は，ボラティリティ（σ）自体が市場の環境によりかなりの変動をする。

b　非危険資産の利子率が一定？

実際には非危険資産の利子率は変動する。

c　原資産価格は連続的に変化？

例えば，突然予期しなかったことが起こり，市場が急変し，原資産価格が非連続に動く時(NY市場の暴落など)，BSモデルでは微小な時間にも対数正規分布の確率密度が存在していることを仮定しており，結果として価格のジャンプは想定していない。

d　将来の原資産価格の期待値は直近の原資産価格にのみに依存する（直近値が異常値でも補正されない。)。

BSモデルでは20,000円が22,000円になる確率と22,000円が24,000円になる確率を同じと想定している。

e　ヨーロピアン・オプションであって，アメリカン・オプションではない。

以上のいくらかのBSモデルの限界に対して，前向きの試みがなされた。その例をあげてみることとする。

その１　配当があるヨーロピアン・コール・オプション

$C=e^{-\delta t}SN(d')-e^{-rt}KN(d'-\sigma\sqrt{t})$

$d'=[\ln(S/K)+\{(r-\delta)+\sigma^2/2\}t]/(\sigma\sqrt{t})=d-\delta\dfrac{\sqrt{t}}{\sigma}$

マートン(Merton)は連続配当を前提として，BSモデルを拡張した。配当が原資産の水準に対して一定の率δ（小数点表示）で連続的に支払われ，オプションの保有者が配当支払いに伴う原資産下落から保護されていないものとすると，BSモデルは上記の式に修正することができる。

そのポイントは，

・　$e^{-\delta t}\cdot S$は，原資産の現在価値から支払われる配当の現在価値を割り引いた値。

・　配当落ちで原資産の下落によりコール・オプションがイン・ザ・マネーになる確率が低くなるためのdの修正。

・　配当支払いがあるアメリカン・コール＞ヨーロピアン・コール。連続配当支払いのヨーロピアン・コールに対する理論プレミアムはアメリカン・コール・プレミアムの価値の下限。

BSモデルは，前提条件のもとでしか解を得ることが難しく，モデルを現実的なものへと求める程，複雑で解けなくなってしまう。そのための方法のなかに，シミュレーションによる数値解法がある。

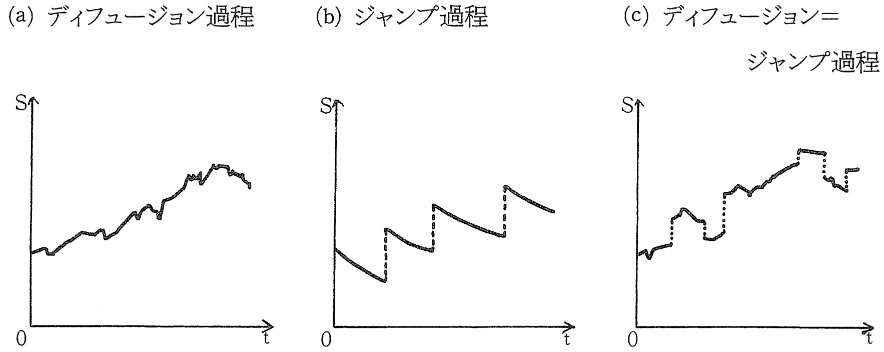
a　原資産価格の確率過程を近似する方法
・　二項過程法
・　モンテ・カルロ法

b　確率偏微分方程式を近似する方法
・　定差法
・　数値積分法

これらの説明は本講座では扱わない。

その２　原資産の価格変動が連続でない場合

〈原資産の価格変動のイメージ図〉



a　ジャンプ・モデル

株価変動のジャンプ過程を認めるモデルで，コックス＝ロスが提唱した後，コックス＝ロス＝ルービンシュタインにおいて修正された。

ジャンプ過程は時間的に連続でありながら大きな価格変化が生じる可能性を認める。

b　ディフュージョン＝ジャンプ・モデル

マートンは原資産の価格変動が原資産に対する一時的な需給関係の変化などによって生じる限界的な価格変化（正常な変動）と，原資産への特別な事情が発生したため短期間に起こると考えられる大きな価格変化（異常な変動）からなるものとして，前者はディフュージョン過程に，後者はジャンプ過程に従うものと考え，ある確率のもとである期待されたジャンプ過程が突発的に起こるようなディフュージョン＝ジャンプ過程に原資産の価格変動が従う時のオプション・プレミアム決定モデルを導いた。

オプションの価格モデルは日々いろんな角度から導出が試みられていることであるが，満足を得られるものの出現は永遠の夢といえるかもしれない。

オプションの価格モデルの解説には一般的に高度な数学が用いられるため，予備知識が必要だが，この講座の主旨はモデルを道具として使いこなしていくことにおいてにあり，その過程で少しずつ理解していけばよい。

次回の講座あたりから基礎編の終盤にさしかかる。

焦らず着実に!!

ドイツ銀証券会社　東京支店
派生商品営業部　課長　城　下　閲　応