解　　説

一般投資家のための
株価指数先物・オプション講座 (17)

第九章　株価指数先物・オプションの理解に役立つ諸知識

その１　先物・オプションの理解を深めるために役立つ数学

これまでの講座の中で数学的知識不足がネックとなって大枠のイメージは何とかつかめたが具体的にその実感が得られないのが実状であろう。

特に，派生商品関連の本格的な理論の理解にはかなり難解な数学的知識が要求される。裏を返せば，派生商品が解らないという声の多くは，まずこの数学的な壁を原因とするものであろう。余程の数学好きでない限りその仕組みを聞いただけで理解することは一般的に不可能である。

いうまでもなく，昨年の５月からスタートしたこの講座は，「わかりやすさ」をそのモットーとして進めてきた。今回の講座もその主旨通り進める予定である。

数学的知識の中で確率・統計の分野は非常に重要な学習分野であり，これなくして話が進まないといっても過言ではない。

さて，今回の講座の進め方であるが，

(1)株価指数先物関連

(2)株価指数オプション関連

の２部にわけてその中に必要と思われる基本的な数学的知識を注釈していく。

(1)株価指数先物関連の数学的知識

株価指数先物に関する数学的知識の必要性は，理論先物価格の算出の際に生じる。

ファイナンスの世界では便宜上無リスクの利子率を連続で表わすことが多く，連続複利ベースでの無リスク利子率をRとし，年率qで連続的に配当が支払われる場合の理論先物価格は，

$$F_t = B_t \cdot e^{(R-q)(T-t)}$$

となる。

- F_t　先物理論価格(先渡価格)
- B_t　原資産価格(日経平均株価等)
- q　年率配当
- R　無リスク利子率
- T　決済時点
- t　現在時点
- e　自然対数の底＝2.718……

注) 1　指数関数 (Exponential Function)

$$Y = f(x) = a^x \quad (x \in R,\ a > 0)$$

指数関数の導関数を考える時，aが特別な値であるものを考える。その特別な値とは，歴史的な理由で自然対数の底と呼ばれる定数であり，万国共通にeという文字で表される。

eは無理数で，具体的な値は$e = 2.7182818459045\cdots$となることが知られている。

(eの性質)

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sigma$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$

(3) $\displaystyle\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$

(4) $\displaystyle e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$

e^xは任意のxにおいて微分可能であり，

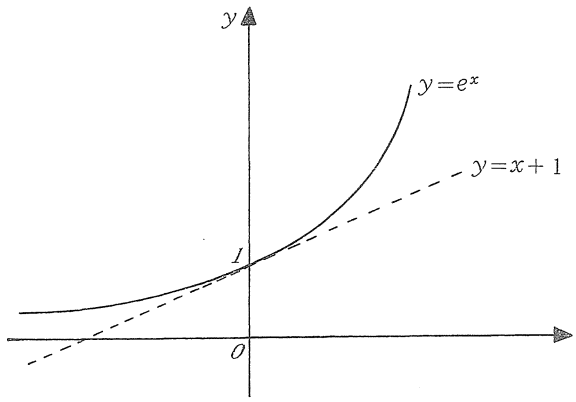
$$\frac{d}{dx} = e^x \qquad \text{(指数関数の導関数)}$$

aを１でない正の定数とすると，

$a^x = \exp(\log_e a^x) = \exp(x\log_e a)$であるから，

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \log a \qquad (\forall x \in R)$$

となる。



ここで，

数学的知識のポイントその１……複利と再投資

について触れておこう。

１年に（$r\times100$）％の利息を支払う預金にY円預けると，

１年後　$(1+r)Y$

２年後　$(1+r)^2Y$

↓

n年後　$(1+r)^nY$

同様に利息の支払いが半年ごとの預金にY円預けると，

半年後　$\left(1+\frac{r}{2}\right)Y$

１年後　$\left(1+\frac{r}{2}\right)^2Y$

１年半後　$\left(1+\frac{r}{2}\right)^3Y$

↓

n年後　$\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n}Y$

となる。

年利（$r\times100$）％の利息をk回に分けて支払う場合の元利合計は，

１年後　$\left(1+\frac{r}{k}\right)^kY$

↓

n年後　$\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kn}Y$

ここでkが無限に大きくなる連続複利のケースは，

１年後　$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{r}{k}\right)^kY$

↓

n年後　$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kn}Y$

となる。

Limは極限をとるという意味の（Limitation）の略で$\lim_{k\to\infty}$はkを無限大にするということ。

これらを自然対数の底eの定義を用いて簡単に表すと，

$$e=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$$

このeを用いて上記の式を書き換えると

１年後　$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{r}{k}\right)^kY=e^rY$

↓

２年後　$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{r}{k}\right)^{2k}Y=e^{2r}Y$

↓

n年後　年利（$r\times100$）％の利息を連続に支払う場合の連続複利のn年後の終価は，

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kn}Y=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{r}{k}\right)^{\frac{k}{r}rn}Y$$
$$=e^{rn}Y$$

となる。

話を本題に戻し，上記の数学的知識を加味して理論先物価格の式を眺めてみればその意味合いが理解できよう。

(2)株価指数オプション関連の数学的知識

株価指数オプションを理解する上で数学的知識が要求されるのはやはりオプション価格評価であろう。

その教材としてブラック・ショールズモデルをとりあげる。先の講座の中でも触れたがここでもう一度示す。

前提条件

1　株価はその平均と分散が一定。

2　取引コスト，税金がなく，証券はすべて分割可能。

3　株式配当はない。

4　無リスクの裁定機会はない。

5　証券の取引は連続的に行われる。

6　連続複利の短期無リスク利子率 r（年率）は一定。

ブラック・ショールズ評価式

コール・オプション価格

$$C = S \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-rt} \cdot N(d_2)$$

プット・オプション価格

$$P = K \cdot e^{-rt} \cdot N(-d_2) - S \cdot N(-d_1)$$

ただし，

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

$N(x)$ は標準正規累積密度関数

Sは原資産価格（株価指数）

Kは権利行使価格

rは無リスク利子率

Pはプット・オプション価格

Cはコール・オプション価格

σは原資産の予想変動率(ボラティリティ)

tは満期までの年率換算日数

注）2　対数関数（Logarithm Function）

対数関数のうち e を底とした対数関数を$\log_e x$と表し，それを自然対数と呼ぶ。微積分法では主として自然対数のみを扱うので，底を省略し$\log x$と書く（Natural Logarithm)。

$$\log x = \log_e x$$

昔，数値計算には常用対数$\log_{10} x$を常用した。そこで，$\log_{10} x$の底10を省略して単に$\log x$とも書く習慣があった。その頃には$\log x$とあると常用対数なのか自然対数なのかを判別する必要があった。$\log_e x$のことを$\ln x$，$\ln(x)$と書くこともある。

$x > 0$ の範囲で，

$$\frac{d}{dx} = \log x = \frac{1}{x} \qquad \text{（対数関数の導関数）}$$

$y = \log x$とすると $x = e^y$ であり，

逆関数の微分法の定理から，

$$\frac{d}{dx}\log x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}e^y} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

となる。

$x \neq 0$ ならば，

$$\frac{d}{dx}\log|x| = \frac{1}{x}$$

対数の底の変換公式によれば $\log_a x = \dfrac{\log x}{\log y}$であることに注意すると，

aを１でない正の定数とすると，

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x\log a} \quad (x>0)$$

（一般の対数関数の導関数）

aが任意の実数ならば，

$x > 0$ において，$\dfrac{d}{dx}x^a = ax^{a-1}$

となる。

上記の評価式（コール・オプション）の意味合いを説明すると，$N(d)$は現在の株価から考えて満期時点で行使価格を超える確率のようなものと考えればよい（権利行使される確率)。

すなわち，株価が行使価格より遙かに高い時（ディープ・イン・ザ・マネーの状態）はその権利行使される確率が高いわけで，当然その確率分布である累積密度関数（$N(d)$）は１に近くなる。逆に株価が権利行使価格より相当低い場合（ディープ・アウト・オブ・ザ・マネー状態）は権利行使される確率は低く$N(d)$は０に近くなる。

従って，

$SN(d_1)$　満期時にイン・ザ・マネーであった時に受け取る株式の現在価値

$X \cdot e^{-rt}N(d_2)$　満期時にイン・ザーマネーであった時に支払う行使価格の現在価値

と説明できよう。

ただし，ボラティリティは与えてやる必要がある。

ここで，

数学的知識のポイントその２…正規分布(ガウス分布)に触れてみる。

正規分布とは，18世紀にイギリスの数学者ド・モアブルにより数学的に定式化され，その後ガウスやラプラスにより確率論的な立場から研究がなされた。

正規分布の形状は単峰，左右対称で富士山のようにその裾野が滑らかでしだいに横軸に接近していくような理想形の分布である。

正規分布の確率密度関数を $f(x)$ として，$f(x)dx$ は以下の式で表される。

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\, exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx$$

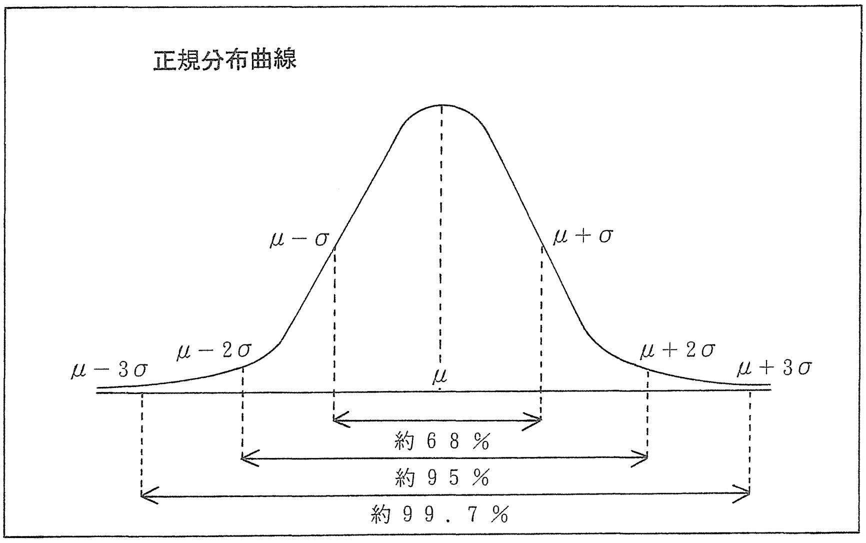
μ 平均　　σ^2 分散

π 円周率（3.14……）

exp{･} はe ＝自然対数の底（2.718……）という数を考え，$e^{(\cdot)}$ という指数関数を表すものである。たとえば，exp{1}＝2.718……であり，exp{2}＝7.389……となる。

dx は小さな区間を表し，このような区間を表すことで上の $f(x)dx$ の式は確率を表す。

正規分布は２つのパラメータ平均と分散のみに依存している。これらはそれぞれ正規分布の平均と分散に対応し，Normal distributionのNをとって，$N(\mu\sigma^2)$ という記号を用いて表す。



ここで平均を中心に標準偏差を単位としてみれば，一定の長さの区間上の面積はいずれの正規分布においても等しい。

そこで変数変換をして x が σ の何倍の値であるか解り易く示したものが次の式である。

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

これを $f(x)dx$ の式に代入すると，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{exp}\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} \mathrm{dz}$$

となり，平均や標準偏差に依存しなくなる。

標準正規分布と呼ばれるものは平均が０で分散が１のものである。

注）３　分布上の中心を表す尺度

モード

最も頻度の高い値(最頻値)。

メディアン

データを小さい方から並べた時にちょうど中央にくるデータの値。

平均

$$\mu = \sum x_i \cdot p_i$$

$f(i)$を第i番目の度数Nをデータの総数とし，相対頻度を $P_i = \frac{f_i}{N}$

注）４　分布のばらつきを表す尺度

平均偏差

データが平均からどれだけ離れているかを示す。

$$S = \sum_i |x_i - \mu| P_i$$

分散

個々のデータが平均からどの程度離れているかを考え，それをデータのスコアとみなし，２乗値の平均を求めたもの。

$$S^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 P_i$$

標準偏差

分散の単位はデータの２乗になり，その値の意味が直感的につかみにくいのでその平方根をとり，データの単位にもどす。

内側四分位レンジ

データの最大値と最小値の差を４等分し，ばらつき具合をとらえる。

変動係数

平均に対する相対的なばらつき度を表し，標準偏差を平均で割ったもの。

数学の知識はあればあるほど役立つのだが，詳しく理解しようとすればするほど複雑になっていく。

今回はとりあえず必要と思われるものをとりあげてみた。

（日本債券信用銀行
キャピタル・マーケット 第４グループ
エクイティ・トレーディングチーム
ストラテジスト　城　下　閲　応）

【訂　正】

先月号（*Vol.*8 №８）３ページ

図１　規制緩和期

縦軸目盛り	(誤)	0　1000　2000 …　8000
(出来高)	(正)	0　10000　20000 …　80000