解　説

デリバティブ実践講座　－9－

～ 上級編 ～　OTC市場の実際(4)

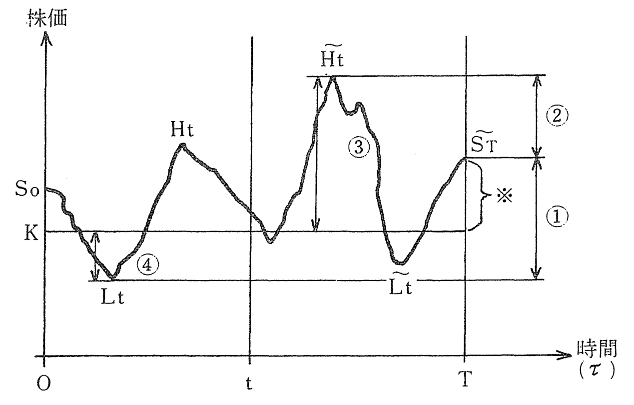
エキゾチック・オプションズ（続）

1　経路依存型（Path-Dependent）オプション（続）

(2)　ルックバック・オプション（Lookback Option）

ルックバック・オプションは，オプション期間中の最高値，又は最安値をそのペイオフの中に持っているオプションである。種類としては，行使価格が期中の最高(安)値となっているもの（＝可変ストライク）と，行使価格は通常のオプションと同様に予め決まっているもの（＝固定ストライク)があり，前者をFloating-Strike Lookback，後者をFixed-Strike Lookback（又はLook forward）と呼んでいる。図1を御覧頂きたい。満期のペイオフは次のようになる。

図1　ルックバック・オプションのペイオフ



※＝通常のコール・ペイオフ
（S_T−K）

〔変動行使価格型，Floating-Strike Lookback〕

コール：Max〔S_T−Min（L_t，$\tilde{L}_t$)，0〕——①

プット：Max〔Max(H_t，$\tilde{H}_t$)−S_T，0〕——②

〔固定行使価格型，Fixed-Strike Lookback〕

コール：Max〔Max(H_t，$\tilde{H}_t$)−K，0〕——③

プット：Max〔K−Min（L_t，$\tilde{L}_t$)，0〕——④

τ＝0の時にスタートし，現在τ＝t，満期時τ＝Tのオプションを考える。t時点において，これまでの最高(安)値はH_t（L_t）で観察されている。一方，今後どのような高値，安値が実現するかは分らないので，t≦τ≦Tでの最高（安）値には不確実性を示す～(tilde）を付してある。

ペイオフを御覧頂ければ分るように，変動行使価格型コールは期中の最安値を行使価格とするコール・オプションであり，満期の株価と期中の最安値との差が支払われる。一方，固定行使価格コールは，期中の最安値と行使価格との差を支払うオプションであり，いわば最高値保証オプションというべきものである。これらのオプションはいずれもアウト・オブ・ザ・マネーにはならないことは明らかであろう。

また，ルックバック・オプションは通常のオプションに比べムシが良いオプションなので，その分だけ値段が高い。ムシの良い部分はストライク・ボーナス（Strike Bonus）と呼ばれ，（ルックバック・オプション）＝（通常のオプション)＋（ストライク・ボーナス）という直感的にも納得しやすい形の分離性（Additive seprability）のあることがGarmanにより示された(尚，変動行使価格型の評価式が吸収壁付ブラウン運動の確率分布式を利用して明らかにされたのは，Goldman＝Sosin＝Gattoの1979年の論文においてである。)。

ルックバック・オプションには通常のオプションのようなプット＝コール パリティは存在しないが，図1でも分るように①＋②＝③＋④が常に成立する。尚，（固定行使価格コール)＝（変動行使価格プット)＋（通常のコール）

$$\mathrm{Max}\left[\max_{0<t<T} S_t - K,\ 0\right] = \mathrm{Max}\left[\max_{0<t<T} S_t - S_T,\ 0\right] + \mathrm{Max}\left[S_T - K,\ 0\right]$$

といった説明も時々見られるが，これは誤りであることを注意しておきたい。

(3)　平均オプション（Average Option，Asian Option）

平均オプションは，満期におけるオプションの価値が，オプション期間中のunderlying assetの平均に依存するオプションである。

ルックバック・オプションのときの議論と同様に，行使価格が期中平均のタイプ（floating-strike Asian option，average strike option）と，行使価格は決まっているが，Terminal Valueが経路の平均のタイプ(fixed-strike Asian option，average price optionとも）とがある。また平均も，OTC市場でみるのはたいていが算術平均（arithmetic average）をペイオフに持つものだが，幾何平均（geometric average）に従うものもある（幾何

平均オプションの方は数学的に扱いが容易（対数正規分布の幾何平均は対数正規分布，従ってclosed-form solutionを導くことができる。）というだけではない。日本ではみないが，たとえば，米国のValue Line株価指数や英国のFTSE-30（ただしFTSE-100ほどのベンチマーク性はない），アジアではシンガポールのST(Straits Times)工業株指数などが幾何平均に従っており，株価あるいは株価指数そのものに対して幾何平均を考えるということは，国際的には必ずしも奇異ではあるまい。）。

それぞれ，コール・オプション・プレミアムを定式化してみると，

〔算術平均型〕

（行使価格変動）

$$=\exp(-r\cdot T)\cdot \mathrm{Max}\left[S_T-\frac{1}{T+1}\sum_{i=0}^{T}S_i,\ 0\right]$$

（行使価格固定）

$$=\exp(-r\cdot T)\cdot \mathrm{Max}\left[\frac{1}{T+1}\sum_{i=0}^{T}S_i-K,\ 0\right]$$

となる。幾何平均型の場合は上記における$\frac{1}{T+1}\sum_{i=0}^{T}S_i$を$\left(\prod_{i=0}^{T}S_i\right)^{1/T+1}=\sqrt[T+1]{S_0\cdot S_1\cdot S_2\cdots S_T}$におきかえればよい。

では，Asian Optionはどのようにして評価されるのであろうか。実は算術平均型については，一般的なケースでclosed-form solutionが存在せず，モンテ・カルロ・シミュレーションなどを使って評価するのが一般的なようである。あまり深入りすると数学的に煩雑になるのでここでは直観的になぜ，Asian Optionの方が，普通のオプションより安いかという点と，これまで余り（筆者の知るかぎり）指摘されていないフォワード・スタート・オプション（後述）との関係について述べておこう。

まずAsian Optionのプレミアムがなぜ通常のオプションよりも安くなるかについて以下のようなケースを考えよう。

ヨーロピアン・コール・オプションの価値は$V_E=e^{-r.T}\cdot E(\mathrm{Max}[S_T-K,\ 0])$で与えられる（$E(\cdot)$はリスク中立測度のもとでの期待値オペレーター）。At-the-money-Spotの場合$K=S_0$であるから，上記式は

$$V_E^{ATMS}=e^{-r.t}E(\mathrm{Max}[S_T-S_0,\ 0])\text{となる。}$$

いま変動行使価格型の算術平均オプションを考え，Averagingは今期と満期の2つだけを平均したものとする。即ち$A=\frac{1}{2}(S_0+S_T)$である。このとき，このAsian Optionの価値は$V_{ASIAN}=e^{-r.t}\cdot E(\mathrm{Max}[S_T-A,\ 0])$

$$=e^{-r.t}\cdot E(\mathrm{Max}[\tfrac{1}{2}(S_T-S_0),\ 0])$$

$$(*A=\tfrac{1}{2}(S_0+S_T)\text{を代入})$$

$$=\frac{1}{2}e^{-r.t}\cdot E(\mathrm{Max}[S_T-S_0,\ 0])$$

$$=\frac{1}{2}V_E^{ATMS}$$

つまりこのケースでは平均オプションの価値はAt-the-money-Spotのヨーロピアン・コール・オプションの$\frac{1}{2}$の価値となる。

次にフォワード・スタート・オプションとの関係を示して変動行使価格オプション・プレミアムの上限を示してみる。次のような例を考える。

営業日＝20営業日

名目元本＝大証換算で日経225オプション20枚分

指数のレベル＝$\tilde{S}_i$($i=0$，1，2，…，20；S_iはi時点における日経225のレベル)

この場合Asian Call Optionの満期におけるペイオフは

（戦略１）

$V_{ASIAN}=20$(枚)$\times \mathrm{Max}(S_T-\frac{1}{21}\sum_{i=0}^{20}S_i,\ 0)$ である。

一方，毎営業日ごとに，その日の日経平均のレベルを行使価格とし（つまり，それぞれの日のアット・ザ・マネー・スポット），最終満期がt＝Tのオプションを１枚ずつ買っていくオプションのポートフォリオを考えよう。

（戦略２）

$V_{PORT}=1$(枚)$\cdot \mathrm{Max}(S_T-S_0,\ 0)+1$(枚)$\cdot \mathrm{Max}(S_T-S_1,\ 0)+\cdots+1$(枚)$\cdot \mathrm{Max}(S_T-S_{14},\ 0)+1$(枚)$\cdot \mathrm{Max}(St-S_{20},\ 0)$

最後（21個目）の$\mathrm{Max}(S_T-S_{20},\ 0)=\mathrm{Max}(S_{20}-S_{20},\ 0)=0$なので，結局，t＝0からはじめて，満期の１日前までの価格をおのおの行使価格とするアット・ザ・マネー・オプションのポートフォリオ（全部で20個）をもつことになる。

さて，この２つの戦略を比べてみると，戦略１のペイオフが０（つまり，平均値の方が満期価格を上回っている）だとしても，戦略２のペイオフが０になるとは限らないことが容易にお分りいただけると思う（平均値が満期価格より上だからといって，期中の全ての価格が満期価格よりも上だとは限らないため）。

即ち戦略２は戦略１をヘッジするにはオーバー・ヘッジ戦略として存在しており，逆にいうならば戦略２を戦

略１のプレミアムの上限を示すものということが出来る。$Max(S_T-S_1,\ 0)$ や$Max(S_T-S_{14},\ 0)$ などはフォワード・スタート・オプションと呼ばれ，その日になるまで，行使価格の決まらないオプションであるが，その現在における価値は，$e^{-\delta T}\cdot C(S_0,\ S_0,\ T-i)$〔ただし$\delta$：配当利回り〕であることが，導かれているので，(戦略２）は当然closed-formで与えられる。

(4)　キャップ付アメリカンオプション

アメリカン・スタイルのオプションが，期中いつでも行使可能なオプションであることは言うをまたないのであるが，アメリカン・スタイルのオプションに，ヨーロピアンのようなコール（プット）スプレッドを考えられるであろうか。行使価格の異なったアメリカン・コール(プット）の組み合わせでは，もしイン・ザ・マネーになった方のオプションを途中で行使しても，スプレッドをつくるために売却した方のアメリカン・スタイル・オプションが残ってしまう。即ち，満期迄行使のないヨーロピアンと同じつくり方はできないのである。行使した時点で，売却した方のオプションも消滅しなければならないが，行使がいつ，どの時点で行われるか明らかでないため，経路依存型オプションの１つということができる。ただし，ひとつだけ明らかなのは，もし原資産価格が，キャップ価格に到達した場合，直ちに行使すべきだという点である。それ以上保有していても，受け取りプレミアムが増える可能性はゼロであるから，行使するのが合理的である。通常は数値解法（binomial　modelやfinite difference method）に依存するのが良い方法であるが，日経225のように配当が小さい場合，

(行使価格＝K，消滅価格B〔B＞K〕のバリア・コール)＋（リベート額R＝B－Kのワンタッチ・デジタル・オプション）の組み合わせで十分近似できる。ただしこの組み合わせの場合，$K<S_t<B$の範囲では行使・消滅がおこらない（できない）ため，キャップ付アメリカン・コールオプションプレミアムの下限ということができよう。

参考までにこのup-and-inのワンタッチ・リベート・オプションの評価式は

$$f=(B-K)\cdot E^{-r.t}\left\{N(x-\sigma\sqrt{T})+\left(\frac{B}{S}\right)^{2\lambda-2}\cdot N(-y+\sigma\sqrt{T})\right\}$$

ただし
$$\begin{cases} N(\,)=\text{累積正規密度関数} \\ x=\ln(S/B)/\sigma\sqrt{T}+\lambda\cdot\sigma\sqrt{T} \\ y=\ln(B/S)/\sigma\sqrt{T}+\lambda\cdot\sigma\sqrt{T} \\ \lambda=\dfrac{1}{2}+\ (r-\delta)/\sigma^2 \end{cases}$$

で与えられる（バリア・コールは煩雑なので省略する。)。

キャップ付アメリカンオプションは，ユーロ市場におけるワラント（日本の証取法上のではない）発行において割合みうけられる商品でである。

2　複合オプション (Compound Option, Option on Option)

オプションそのものを売買する権利をcompound option (option on option) と呼んでいる。定義上，コールを買う権利 (Call on Call，Geske〔1977〕がとりあげたのはこのオプションである。)，コールを売る権利（Put on Call)，プットを買う権利（Call on Put)，プットを売る権利（Put on Put）の４種類が考えられる。

勿論オプションのオプションのオプションの…といくらでも複合化することはできるが，市場の需要がなくては意味があるまい（市場の需要に応じた例を(2)で紹介する。)。このオプションを最初に評価したのはGeskeであるが，彼は株式そのものが，企業価値に対するオプションであると考えた。なぜなら企業が破産したときに，最初に請求権を持つのは，株式保有者ではなく社債券の保有者であり，社債の総額 (total debt) が，あまりに過大だと株主にお金が返ってこないからである。従ってこうした特性をもつ株式に対するオプションは，まさしくOption on Optionであると彼は考えたわけである（これは，たとえば最近のにっかつ株に対するコールあるいはプットオプションを考えてみるとうなずけるものがあるといえないだろうか。)。

(1)　優柔不断（chooser）オプション

複合オプションの応用の１つにこのチューザー・オプションをとりあげてみよう。

このオプションは，コールを買って満期まで１年あるが，たとえば３カ月後に市場が下落していれば期初の行使価格でプットに変えてもよいという権利のついたオプションである。少し考えれば分るようにこのようなペイ

オフは，３カ月後に，残存９カ月間のコールを買う権利とプットを買う権利を買っておけば達成可能である。即ち，コンパウンド・オプションのストラドルとなっているわけである。更に考えれば分るが，満期迄コールにするかプットにするか決めなくてよい。即ち，どちらがイン・ザ・マネーになるか分ってから決めてよいというようなオプションが，極限的(？)優柔不断オプションだが，それは即ち通常のストラドルの買いと同じである。つまり，優柔不断オプションは，途中でやり直しがきく分だけ通常のオプションよりムシが良いので割高だが，途中で選ばなくてはならない分だけ通常のストラドルよりも割安となる。いわば，普通のオプションとストラドルの〝間〟を埋める商品であると定式化できる。

複合オプションの評価式は一般的には二次元正規分布関数を含むが，このタイプの優柔不断オプションはBlack-Scholes式導出の仮定を維持する限り，一次元の関数だけであらわすことができる（この単純だが美しくトリッキーな導出については，Mark Rubinstein，〝Options for the Undecided〟, RISK April 1991を参照)。

筆者の印象に残っている優柔不断オプション（ワラント）は，やはりユーロ市場で，湾岸戦争の１日前(!)に出されたWTIチューザー・ワラント（コール）だった。湾岸戦争突入と同時に原油市場は一挙に10ドル/バーレル，率にして実に30％以上下落した。ワラント購入者全員が優柔不断の恩恵をうけて，プット・ワラントに転換したのは想像に難くない（このような状況では，いかなるオプション・トレーダーも（オプションによってヘッジしていない限りは）ガンマ・リスクをヘッジしようがない。筆者もトレーダーの端くれであるが，自分なら，このワラントを発行するにあたってどのようなヘッジを準備しただろうかと，当時真剣に考えたことを覚えている。理論の世界には，ギャップも需給の不均衡も存在しない。そもそも資産の分布が対数正規分布かどうかも実証されているわけではない。派生商品トレーダー自戒の一日であった。)。

(2)　中途解約権付オプション

これはプレミアム分割払いオプションの一種である。ただし通常の延べ払いオプションと異なり，このオプションをこのまま買い続けてもどうせ勝てないと思えば途中でプレミアム支払いを放棄できるオプションである。

たとえば，昨年の８月のように日経平均株価が14,000円近辺まで下落した時に，保険の意味で行使価格14,000円，満期１年のプットを買いたいと考えたとする。もしその時，この１年のプットを購入していれば，その後出された総合経済対策による株価の急騰で，この保険そのものは無駄に終ってしまったわけである。保険として買ったのであるから，別に無駄になって悪いわけではないのだが，そのとき，この中途解約権付でプットオプション（たとえば月に１回，12回払い）を買っておけば，１～２回払った段階で，おそらくもうこの保険は要りませんといって解約していた可能性が高い。結果的に12回払ってしまえば，当然１年ものプットを最初から買ったのに比べ割高になるが，途中放棄できる分，保険料が安くなる可能性を買い手に与えるオプションと言うことができる。分割払いの回数，支払日は買い手があらかじめ自由に選択できる。

理論的にはこのオプション価格をclosed-formで導くことが可能であるが（たとえば12回払いであれば13次元正規分布関数がでてくる筈)，実務上，多次元の正規分布関数の値を求めるのが現実的ではないため，数値解法に頼るのが一般的であろう。

3　その他

どこかの会社のオプションの宣伝(雑誌広告)に，〝You name it. We will write it.〟というのがあったが，まさしく，顧客の需要に応じてたいていのペイオフはつくり出すことができる。しかし新種のエキゾチック・オプションをつくってしまうと，それまであったリスク管理システムやバック・オフィス系のシステムも直さなければならず，負担は決して軽いものではない。しかし一方で顧客に対するサービス競争の中で，高度な需要に応えるにはそれなりの対応をする必要があり，何でもそうだが，トレード・オフの最適点を求めるのが，各社における重要な戦略の１つであると思う。

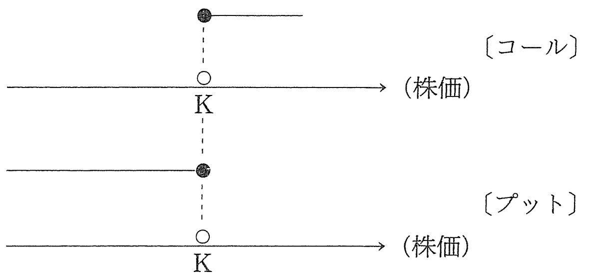
原資産が１つの項では最後に１つだけ，「exotic度」では最も少ないが，オプション・ポートフォリオ管理の概念上はきわめて重要となってくるデジタル・オプションをとりあげよう。

デジタル・オプションのペイオフは次のようになっている。

(コール) $\begin{cases} S_T \geqq K\text{の場合} & 1 \\ S_T < K\text{の場合} & 0 \end{cases}$

(プット) $\begin{cases} S_T \geqq K\text{の場合} & 0 \\ S_T < K\text{の場合} & 1 \end{cases}$

図2　デジタル・オプションのペイオフ



(※これも実は$S_T = K$の状態においてDiracのデルタ関数やHeaviside関数との関わりがでてくるのだが，ここではそういった厳密な議論は一切省略する。)

通常のコール（プット）オプションは，原資産価格が行使価格を超えた場合に応じてペイオフの値が異なる($S_T - K$，又は$K - S_T$)が，デジタル・オプションは，行使価格を超えたか否かだけが問題であり，どのくらい超えたかを問題としない。ある意味で，言葉は悪いが「イチかバチか」の宝くじのようなオプションである。

応用例ーデジタル・ストラドル（ストラングル）

実はこれはストラドルでなくデジタル・コール（又はプット）のスプレッド（又はストラングルの売り）なのであるが，形上ストラドルのようにみえるのでそう呼ぶことにする（You name itなので好きな名前をつけて頂きたい。)。実際本当にデジタル・コールとプットの組み合わせをつくると，どんな場合でも満期に1円もらえるというペイオフになり，その現在価値は満期に1円となる割引債（$1 * e^{-rT}$）と等価になってしまう。

図3　ペイオフの比較

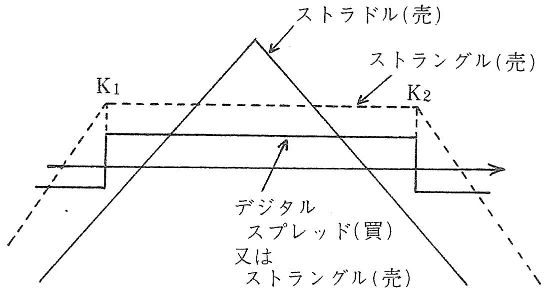


図3をみて頂きたい。行使価格K_1のデジタル・コールを買い，行使価格K_2のデジタル・コールを売ると図のような「ストラドル的」ペイオフになる。また，このペイオフは当然ながら行使価格K_1のデジタル・プットを売り，同時に行使価格K_2のデジタル・コールを売ることによってもつくることができる。この点でこの戦略はデジタル・ストラングルとでも呼ぶべきで，他のオプションが全て売り持ちであることを考えると，ストラングルの売りであると考えた方がプレミアムを先取りできることも考えあわせると自然かもしれない。先月号で紹介したノックイン・ストラドルとはK_1又はK_2の外に出た時のペイオフが異なっている（より安全)。

以上，原資産が1つのものについて駆け足で説明した。次号では複数の資産に対するオプションについて紹介し，更に長期オプションに固有のリスクについて項を改めて筆者の実務的経験も含め簡単に説明することにしたい。

(続)

(T. O.)