# 解　説

## デリバティブ実践講座　—10—

# ～ 上級編 ～　OTC市場の実際(5)

## 複数資産に関わるエキゾチック・オプションズ

### 4　複数株式(指数)に関わるオプション

さて，今月号ではオプションのペイオフが複数の資産に関わるものについて考えてみよう。まず，同一通貨で表示されている資産間のオプションについて紹介する。

(1)　交換(相対パフォーマンス)オプション

交換オプションは，2つの資産の相対パフォーマンスを享受できるオプションである。いま，2つの資産を$S_1$，$S_2$としよう。このとき交換オプションのペイオフは一般的に$f=Max(S_1-kS_2,\ 0)$と表わすことができる。$S_1$，$S_2$は何でもよい。例えば，$S_1$＝日経225指数，$S_2$＝自分の持っているポートフォリオでもよい。kは通常$S_1-kS_2=0$となるように定められることが多い。これは即ち，現在時点での2つの資産($S_1$と$kS_2$)の市場価値が同じになるように定める(アット・ザ・マネー・スポット)ことに他ならない。例えば$S_1$＝日経平均レベル＝20,000円，$S_2$＝ポートフォリオの価値＝4,000円とすると，k＝5となる(kの値を調整することで，イン・ザ・マネーにもアウト・オブ・ザ・マネーにもできる。)。そうするとこの場合，このオプションの買い手は，自己保有のポートフォリオがベンチマークとして使っている日経225指数よりも相対的にアンダーパフォームした時に少なくとも指数と同じだけのリターンを得られるように保険をかけていると考えることができる。例えば，$S_1$：20,000→22,000円（10%上昇)，$S_2$：4,000→4,200円（5%上昇）という事態が満期に起こったとすると，このオプションの買い手は1枚あたり22,000－5×4,200＝1,000円をもらえることになるのである。交換オプションと呼ばれる理由は，$kS_2$をオプションの売り手に受け渡して，かわりに$S_1$を交換でもらうことができるという点にある。もちろん現金による差金決済も可能である。

注意すべきことは，このオプションの価値が，あくまで2資産の相対的な動きで決まるということで，$S_1$，$S_2$ともに下落しても，$S_2$の下落幅の方が大きければ，ペイオフは正になるということである。

実は，通常のコール(プット)オプションも，たまたま片方($S_2$)が現金という，安全金利を配当としてもつ安全資産と危険資産との交換オプションと考えることができるわけで，交換オプションは表現としてはより一般的な定式化ということができよう。

最初にこの問題に対する解答が公にされたのはMargrabe(1978)によってであるが，2資産の満たすべき偏微分方程式に対し$X=S_2/S_1$の変数変換を施してやることによって，きれいな通常の一資産の式に収斂するので，Black-Scholesの結果を知っていれば，簡単にclosed-form solutionを導くことができる。参考までに，通常のプット・オプションの評価式を$P(S,\ K,\ r,\ d,\ \sigma,\ t)$と書くとすると，交換オプションの価値は

$$f(S_1,S_2,t)=P(kS_2,S_1,d_1,d_2,\sqrt{\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2-2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2},t)$$

ただし　$d_1$：資産$S_1$の配当率(連続)

$d_2$：資産$S_2$の配当率(連続)

$\sigma_1$：資産$S_1$のボラティリティ

$\sigma_2$：資産$S_2$のボラティリティ

$\rho_{12}$：資産$S_1$と$S_2$の収益率の相関係数

と書ける。

筆者のようなオプション・ディーラーにとってこのようなオプションにおけるやっかいな問題は実は2つある。1つはボラティリティのふるまい，もう1つは相関係数である。この2つの問題は今後紹介する複数資産に関わるオプションにとって殆ど共通するものである。

所謂「第一世代」のオプションしか扱かったことのない人にとってはボラティリティの上昇は即ちオプション・プレミアムの上昇に結びつく。しかし紹介した定式をみていただくとわかるのだが，交換オプションの場合，この関係は一様ではない。

$f(\sigma_1)=\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2-2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2$とおくとこれは変形できて

$=(\sigma_1-\rho_{12}\sigma_2)^2+\sigma_2{}^2(1-\rho_{12}^2)$ となる。

$\sigma_2$や$\rho_{12}$を固定すると，これは$\sigma_1$について二次関数(放物線)であり，$\sigma_1$の値が，$\rho_{12}\sigma_2$以上でも以下でも$f(\sigma_1)$の値は上昇する。ということは，放物線の中心の左側にいる場合，$\sigma_1$を増やすと（$S_1$のボラティリティを上げると）$f(\sigma_1)$の値は小さくなり，したがってオプションの価値は減少する。

二番目の点は，相関係数(correlation)については基本的に反対ポジションを取る以外ヘッジする手段が存在しないということである。容易に想像がつくように，$\rho$は一定ではなくボラティリティそのものと同様変動している。

しかし問題の本質はそうした点にあるのではない(実務的には最も重要な問題の1つであるが)。若干テクニカルな議論になるが，オプション(f)に対してヘッジを組むときに，一階のオーダー(first-order)のものはデルタ・ヘッジで，二階のオーダー(second-order)のものはオプション・インストルメントに頼ることでガンマのコントロールが可能になる(例えば，あとから紹介する為替に関するオプションなら，日経オプションと通貨オプションを売買すればよいわけである。)。

しかし，二階のオーダーのヘッジは$\partial^2 f/\partial S_1^2$と$\partial^2 f/\partial S_2^2$をそれぞれヘッジしているだけであって，実はもう1つの2階オーダーの増分$\partial^2 f/\partial S_1 \partial S_2$についてはヘッジする手段が存在しないことになる。correlationそのものを取引できる市場ができれば言うことはないのだが，資産の組み合わせはそれこそ無限に考えられるので，実際に自分がヘッジしたいcorrelationの市場(例えば，相関係数先物)を期待するのはほぼ不可能である。しかし，いずれにせよ「第二世代」のオプション・トレーダーにとってcorrelationの管理（あるいはrisk-taking）は，ボラティリティの管理と並んできわめて重要な問題となっている。

本題から少し横道にそれた。先を急ごう。

(2)　比率オプション（Ratio Option）

相対パフォーマンス・オプションの1つの変形にこの比率オプションがある。例えば先の例で$S_1$＝日経平均，$S_2$＝ＴＯＰＩＸとすると$(S_1/S_2)$，所謂N/T倍率に対するオプションとなる。N/Tレシオ・コールのペイオフはMax(Nikkei(t)/TOPIX(t)－K，０)，逆にプットのペイオフはMax(K－Nikkei(t)/TOPIX(t)，０)と書くことができる。Kは行使倍率(strike ratio)であり自由に設定できる。定式化は交換オプションとよく似た形をしている(なお，相関係数の動きを図1に示した。)。

(3)　最大・最小オプション

交換オプションは相対的に良いパフォーマンスの方の資産のリターンを与えるものなので，両方の資産がともに簿価を割った時に，最低限，簿価あるいは安全資産に投資したのと同じだけの利回りの保証をするものではない。これに対し，最大オプションはこのフロアを引くもので，そのペイオフは$C\max = \mathrm{Max}(\mathrm{Max}(S_1, S_2)-K, 0)$と表すことができる。同様に次善のペイオフを考えることも可能で，それは最小オプションと呼ばれる。

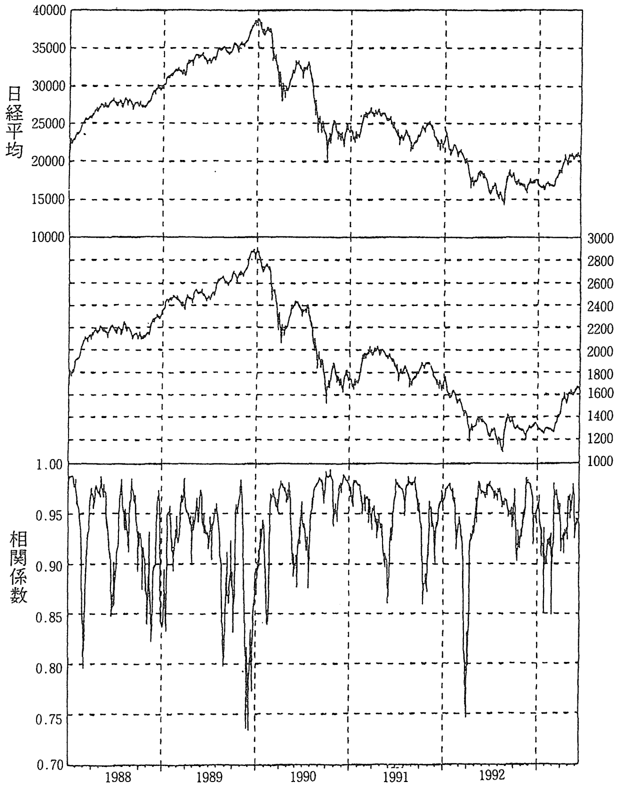
ペイオフは，$C\min = \mathrm{Max}(\mathrm{Min}(S_1, S_2)-K, 0)$となる。

図1　日経対ＴＯＰＩＸ相関分析

期間：20日間　'93.6.14現在

最大相関：0.9940683　最小相関：0.7337343

平均相関：0.9377825　標準偏差：0.04390772




筆者の知る限り，最初に結果が公にされたのはStulz（JFE，1982）によってである(ただし同論文の(11)式は誤っている。)が，Herb Johnson(JFQA，1987)によってn資産に一般化され，その後も確率過程論の成果を使いながらさまざまな一般化が試みられている（例えばSusan-Cheng (1990)，また評価式は二変量正規分布関数を含む若干煩雑な形をしているので，興味のある読者はJohnsonらの原論文(6)式，(8)式を参照)。また，Cmax＋Cmin＝C（$S_1$，K)＋C（$S_2$，K）というパリティ式が成立することを注意しておこう。

最大オプションは，交換オプションに比べ保証する部分の多いので当然割高になる。実際，行使価格が0という最大オプションの特殊なクラスが交換オプションに保有資産($S_2$)を加えたものに一致するのはペイオフを見れば明らかであろう。

数年前からBest Return Strategyという名前のもとに，投資のユニバースを4～5資産にして，最高のリターンを上げた資産の利益を与えるというきわめて魅力的に響くファンドあるいはオプションが提供されている。理論評価式そのものはclosed-formで書けるのだが多次元正

規分布関数をいかに速く少ない誤差で計算するかという数値計算上の問題以外に，多資産にわたる分数・共分散行列の不安定性（任意の組み合わせのcorrelationのどれもが安定的ではない。）に実務上どうやって対処するかという大問題が存在しているため，結局のところトレーダーのstate of art(?)—あるいは勘と経験と度胸？—に頼る部分も多いのではあるまいか。投資ユニバースにもよるが，保守的な相関係数とボラティリティのもとに，まともにプライシングを行うと非常に割高になってしまう（まあ，ムシの良いオプションなので当然といえば当然だが）ので，市場に対するskillは必須だと筆者は考えている。

## 5　為替レートと株価の関係するオプション

さて，もう１つのクラスのオプションとして今度は為替レートと株価の双方にまたがるオプションを見てみよう。

(1)　為替レート保証型(Guaranteed Exchange Rate：GER)オプション，QUANTOオプション

例えばドル・ベースの投資家にとって，日経指数（インデックス・ファンドあるいは先物）に投資するということは株価のリスクを負っていると同時に円/ドル為替のリスクも負っていることになる。日経指数が10%値上がりすれば，円/ドルレートに関わりなく10%，値上り分がそのままもらえるような契約を作れないだろうかという投資家の需要がこの商品を生んだと言ってよいだろう。金利の分野でもLibor Differential Swap (Quanto Swap)という商品があるが，基本的には枠組は同じである。ＧＥＲコールのペイオフは

$\mathrm{Max}(\tilde{S}_T \cdot \bar{X} - K \cdot \bar{X},\ 0)$（ドル）となる。ただし

$\tilde{S}_T$：満期の日経平均レベル（円）

$\bar{X}$：保証する為替レートの水準（ドル/円）

である。参考までにコール評価式は，

$$\exp(-r_{\$} \cdot t) \cdot [S \cdot \exp(r_{¥} - \delta - \rho\sigma\sigma_{FX}) \cdot N(d) - K \cdot N(d - \sigma\sqrt{t})]$$

ただし$r_{\$}$　：外国金利（支払い通貨の金利）

$r_{¥}$　：自国金利（株式指数の表示通貨の金利）

$\rho$　：株と為替の収益率の相関係数（correlation）

$\sigma$　：株価指数のボラティリティ

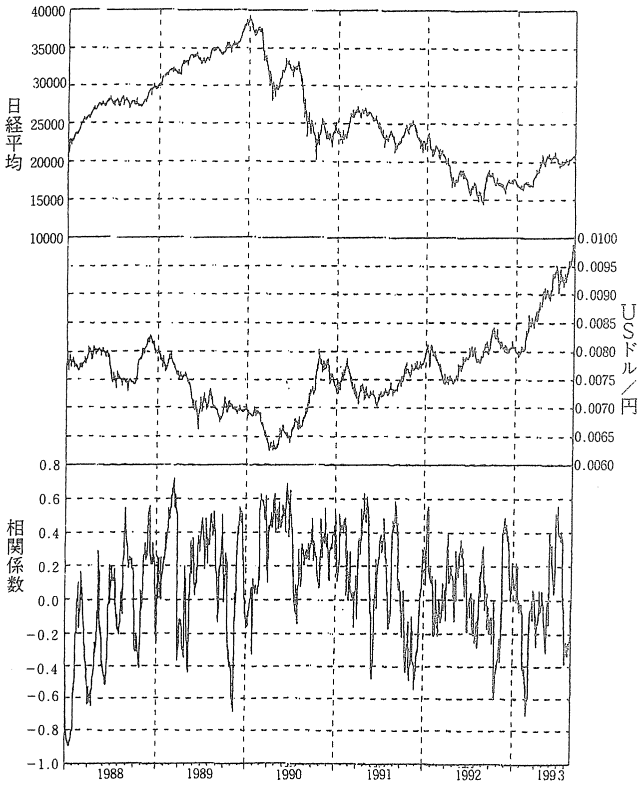
$\sigma_{FX}$　：為替のボラティリティ

$\delta$　：株の配当率

$d$　：$\{\ln(S/K) + (r_{¥} - \delta - \rho\sigma\sigma_{FX} + \frac{1}{2}\sigma^2)t\}/\sigma\sqrt{t}$

$N(\ )$：累積正規密度関数

図２　回転相関係数分析　日経対ＵＳドル/円
期間：20日間　'93.8.23現在
最大相関：0.7100641　最小相関：0.896954
平均相関：0.08269857　標準偏差：0.3174369




である。株と為替のcorrelationの例を（図２）に示した。

評価式から明かなように，このドル建て日経平均の変動性をコントロールしているのは円建て日経平均の変動性である。異なる点は割引率が外国金利になっていることと，ドリフト項に$\rho\sigma\sigma_{FX}$の分だけ修正が加わっていることである。周知の如く，シカゴ・マーカンタイル取引所(CME)に上場され取引されている日経先物はドルのGER型となっており，GER先渡契約の形で正確には評価されるべきものである（ただ，先物の場合は満期が短いのでさほど$\rho$などの影響はない。）。先にも述べたが，$\partial^2 f/\partial S \partial FX$をヘッジできる原資産（及びその派生商品）はそれ自体の反対売買以外に存在しない。

(2)　クロス・オプション（簿価保証型オプション）

今度は日本の投資家がSP500指数に投資するケースを例にとって考えてみよう。

| (表１) | 株　価 | 為　替 |
|---|---|---|
| 現　在 | $S_O$ (ドル) | $X_O$ (円/ドル) |
| 満　期 | $\tilde{S}_T$ (ドル) | $\tilde{X}_T$ (円/ドル) |

表１をみてみよう。円投ベースの投資家にとって期初

投入資金は$S_0 \cdot X_0$（円）であり，満期にドル資産を売却し，円転した時の受け取りは$\tilde{S}_T \cdot \tilde{X}_T$（円）である。単純な計算例だが，ＳＰ指数が例えば，400→440ドル，一方為替は125→100円になったとしよう。つまり株価は10%上昇したが，運悪く(？)円高が20%進行したケースである。

(期初投入資金)＝400×125＝50,000円

(期末受取資金)＝440×100＝44,000円

即ち相場観があっていたにもかかわらず，マイナスになってしまう例である。これを避けるためには，(1)でとりあげたGERオプションは１つの方法だが，もう１つのオプションがこのクロス・オプションである。コールのペイオフは

$$\mathrm{Max}\ (\tilde{S}_T \cdot \tilde{X}_T - K,\ 0)$$

アット・ザ・マネーであれば$K = S_0 \cdot X_0$即ち購入簿価となる。GERオプションとちがって為替レートの保証は行っていないが，(株価)×(為替)の積がある一定水準(例えば簿価)以上になることは保証するものである。

この商品は米国債に対するオプションが最初で，随分利用されたようである。ただし，殆どのケースは，プレミアムを得るため，簿価(ないしはターゲット価格)を行使価格とするカバードの売り戦略であったようだ。

評価式は通常オプション式と同じ形で，Sのかわりに$S_0 \cdot X_0$を，ボラティリティとして$\sqrt{\sigma^2 + \sigma^2_{FX} + 2\rho\sigma\sigma_{FX}}$を使えば評価できる（配当については金利パリティ式を考慮した若干の修正が必要。)。

以上「correlationのゲーム」に関わるオプションについて簡単に解説した。実際は更にこれを組み合わせたもの（例えば日経とSP500の為替レート保証(円又はドル)型スプレッド・オプションやCAC40とFTSE100のスプレットをドイツマルク建てで保証するオプションなど)も開発され，実際に顧客と取引されている。しかしcorrelationの数を増やすことは，自分がヘッジできないものを増やすことであり，一方で両サイドのニーズをwarehousingして自然な形でヘッジするためには一歩を踏み出す必要がある。各社は各社の戦略に見合った形でリスク管理に向わなければならないのではないかと筆者はリスク管理をしているものの１人として考えている。

以上でエキゾチック・オプションの項は終わり，次号ではエクイティ・スワップなどについて概観してみたい（この項了)。　　　　(T. O.)