

ARCH 型モデルの応用による日経 225 オプションの 実証分析に関するサーベイ*

日本大学経済学部教授 三井秀俊

1. はじめに

本稿は、代表的なボラティリティ変動モデルである ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) 型モデルを応用した日経 225 オプション評価の実証分析に関してサーベイを行なったものである。ARCH 型モデルは金融時系列データの非線形性をうまく捉え、モデルを拡張することが可能なことからオプションの実証分析に対しても有効である¹⁾。日経 225 オプションの実証分析で用いられる ARCH 型モデルは、GARCH (Generalized ARCH) モデル、EGARCH (Exponential GARCH) モデル、GJR (Glosten Jagannathan Runkle) モデル、FIEGARCH (Fractionally Integrated EGARCH) モデルとこれらのモデルを応用したモデルが用いられることが多い²⁾。本稿では、これらの ARCH 型モデルを応用して、原資産価格のブル・ベアを捉えることが可能な MS-GARCH (Markov Switching GARCH) モデル、MS-EGARCH (Markov Switching EGARCH) モデルと、原資産収益率の分布の歪みを捉えることが可能な混合正規 EGARCH モデル、混合 t EGARCH モデルとによる日経 225 オプションの実証分析に関して概観する。

2. 原資産価格のブル・ベアを考慮したオプション評価

2.1 MS-GARCH モデルによる分析

Satoyoshi and Mitsui [2011] は、原資産となる日経 225 のブル・ベアの変動を捉えるために、モデルのパラメータがマルコフ過程に従う MS-GARCH モデルを用いて実証分析を行なっている。時点 t での日経 225 株価収益率 R_t の過程を以下のおく。

$$R_t = \mu + \epsilon_t, \quad \epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad z_t \sim i.i.d. E[z_t] = 0, \quad Var[z_t] = 1. \quad (1)$$

ここで、定数項 μ は期待収益率、 z_t は誤差項であり、収益率に自己相関は無いと仮定する。*i.i.d.* は、過去と独立で同一な分布 (independently and identically distributed) を表す。ボラティリティ σ_t^2 の過程は以下のように定式化している。

$$\sigma_t^2 = \omega_{s_t} + \alpha_{s_t} \epsilon_{t-1}^2 + \beta_{s_t} E[\sigma_{t-1}^2 | \Omega_{t-2}], \quad (2)$$

$$\omega_{s_t} = \omega_0(1 - s_t) + \omega_1 s_t, \quad \alpha_{s_t} = \alpha_0(1 - s_t) + \alpha_1 s_t, \quad \beta_{s_t} = \beta_0(1 - s_t) + \beta_1 s_t. \quad (3)$$

ボラティリティ σ_t^2 は、 $t-1$ 時点までの情報集合 $\Omega_{t-1} = \{R_{t-1}, R_{t-2}, \dots\}$ と t 時点の状態変数 s_t を条件とした ϵ_t の条件付分散、つまり、 $\sigma_t^2 = Var[\epsilon_t | I_{t-1}, s_t]$ である。(2) 式の Ω_{t-2} は $t-2$ 時点までの情報集合 $\Omega_{t-2} = \{R_{t-2}, R_{t-3}, \dots\}$ である。(3) 式の s_t はマルコフ過程に従う状態変数であり、その推移確率 (transition probability) は、

$$\Pr[s_t = 1 | s_{t-1} = 1] = p, \quad \Pr[s_t = 0 | s_{t-1} = 0] = q \quad (4)$$

*本稿は三井 [2014a] を一部抜粋し、大幅に加筆・訂正をしたものである。

¹⁾詳しくは、三井 [2014b] を参照。

²⁾ARCH 型モデルによる日経 225 オプション価格に関する実証研究のサーベイとして、三井 [2014a] を参照。

表 1: マネネスによるオプションの分類; 5 つのカテゴリーのケース

マネネス	コール	プット
$S/K < 0.91$	deep-out-of-the-money (DOTM)	DITM
$0.91 \leq S/K < 0.97$	out-of-the-money (OTM)	ITM
$0.97 \leq S/K \leq 1.03$	at-the-money (ATM)	ATM
$1.03 < S/K \leq 1.09$	in-the-money (ITM)	OTM
$1.09 < S/K$	deep-in-the-money (DITM)	DOTM

(注) S は原資産価格, K は権利行使価格を表す.

であるとする. ただし, $\Pr[s_t = j | s_{t-1} = i]$ は, 状態 i から状態 j に推移する確率である. z_t の分布には, 標準正規分布と t 分布を仮定している.

原資産となる日経 225 の標本期間は 1990 年 2 月 22 日から 2005 年 3 月 10 日までである. MS-GARCH モデルのパラメータの推定には, 最尤法を利用している. オプション評価の際には, 投資家のリスク中立性を仮定し, モンテカルロ・シミュレーションを用いてオプション価格を導出している³⁾. モンテカルロ・シミュレーションの分散減少法には制御変数法と負相関法を併せて用いている. 日経 225 オプションの標本期間は 2000 年 5 月限月から 2005 年 4 月限月までであり, 標本数はコール・オプションが 608, プット・オプションが 671 である. 満期日まで 20 日のオプションの終値を対象としている. 無リスク資産としては, 無担保コール翌日物を用いている. モデルのパフォーマンス評価に関しては, 平均誤差率 (Mean Error Rate; MER) と平均 2 乗誤差率の平方根 (Root Mean Square Error Rate; RMSER) により行なっている. また, マネネスの分類は 5 つのカテゴリーで行なっている (表 1 を参照).

コール・オプションについては, RMSER の基準では t 分布を仮定した MS-GARCH モデルによるオプション価格付けのパフォーマンスが最も優れているという結果となっている. また, MS-GARCH モデルは DOTM, OTM, ATM, ITM における B-S モデルの underpricing を修正できることが明らかにしている. 特に, このことは DOTM と OTM において顕著である. プット・オプションについては, MER の基準では t 分布を仮定した MS モデルによるオプション価格付けのパフォーマンスが最も優れており, RMSER の基準では t 分布を仮定した GARCH モデルによるオプション価格付けのパフォーマンスが最も優れているという結果を得ている. 全体的にみると, MS-GARCH モデルによるオプション評価は, Black-Scholes モデル (B-S モデル) よりも適正な価格付けを行なうことができる. また, 原資産価格収益率に対する t 分布の仮定とボラティリティが MS 過程に従うという仮定は, オプション価格の評価において非常に重要であるということを明らかにしている.

2.2 MS-EGARCH モデルによる分析

里吉・三井 [2016] は, Satoyoshi and Mitsui [2011] での問題点を解決し, より精度の高いオプション評価を行なうため MS-EGARCH モデルにより分析を行なっている. 日経 225 株価収益率 R_t の過程を以下のように定式化する.

$$R_t = \mu_{\Delta_{1,t}} + \sqrt{\sigma_{\Delta_{2,t}}^2} z_t, \quad z_t \sim i.i.d.t(0, 1, \nu), \quad (5)$$

$$\mu_{\Delta_{1,t}} = \mu_0(1 - \Delta_{1,t}) + \mu_1\Delta_{1,t}, \quad \mu_0 < \mu_1, \quad \sigma_{\Delta_{2,t}}^2 = \sigma_0^2(1 - \Delta_{2,t}) + \sigma_1^2\Delta_{2,t}, \quad \sigma_0^2 < \sigma_1^2. \quad (6)$$

³⁾日経 225 オプションのようなヨーロッパ・オプションは, 原資産となる日経 225 株価収益率のデータにより ARCH 型モデルのパラメータの推定を行ない, 推定されたパラメータを用いてモンテカルロ・シミュレーションによりコール・オプション価格とプット・オプション価格を求めることができる. 詳しくは, 三井 [2014a] を参照.

表 2: マネネスによるオプションの分類; ; 7つのカテゴリーのケース

マネネス	コール	プット
$S/K < 0.85$	very-deep-out-of-the-money (VDOTM)	VDITM
$0.85 \leq S/K < 0.91$	deep-out-of-the-money (DOTM)	DITM
$0.91 \leq S/K < 0.97$	out-of-the-money (OTM)	ITM
$0.97 \leq S/K \leq 1.03$	at-the-money (ATM)	ATM
$1.03 < S/K \leq 1.09$	in-the-money (ITM)	OTM
$1.09 < S/K \leq 1.15$	deep-in-the-money (DITM)	DOTM
$1.15 < S/K$	very-deep-in-the-money (VDITM)	VDOTM

(注) S は原資産価格, K は権利行使価格を表す。

(5) 式の誤差項 z_t の分布については, 日経 225 の収益率の裾の厚さ (fat tail) を多くの先行研究で指摘されていることを踏まえ, ここでは t 分布に従うと仮定している. $\Delta_{1,t}$ と $\Delta_{2,t}$ は互いに独立なマルコフ連鎖に従う状態変数であり, それぞれ 0, または 1 の値をとる. また, その推移確率は,

$$\Pr[\Delta_{1,t} = j | \Delta_{1,t-1} = i] = p_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \quad (7)$$

$$\Pr[\Delta_{2,t} = l | \Delta_{2,t-1} = k] = q_{kl}, \quad k, l = 0, 1, \quad (8)$$

$$\sum_{j=0}^1 p_{ij} = \sum_{l=0}^1 q_{kl} = 1 \quad (9)$$

とする. ただし, (7) 式の $\Pr[\Delta_{1,t} = j | \Delta_{1,t-1} = i] = p_{ij}$ は, 変数 $\Delta_{1,t}$ が状態 i から状態 j に推移する確率, (8) 式の $\Pr[\Delta_{2,t} = l | \Delta_{2,t-1} = k] = q_{kl}$ は, 変数 $\Delta_{2,t}$ が状態 k から状態 l に推移する確率である. 平均は $\Delta_{1,t}$ の推移に従って変動し, $\Delta_{1,t} = 0$ のときに μ_0 , $\Delta_{1,t} = 1$ のときに μ_1 になる. ボラティリティの変動には EGARCH モデルを仮定し, 以下のように表される.

$$\ln \sigma_{\Delta_{2,t}}^2 = \omega_l + \beta_l \ln \sigma_{\Delta_{2,t-1}}^2 + \theta z_{t-1} + \gamma [|z_{t-1}| - E(|z_{t-1}|)]. \quad (10)$$

$\sigma_{\Delta_{2,t}}^2$ は, $t-1$ 期までの情報と $\Delta_{2,t} = l$ を条件とした R_t の条件付き分散である. (10) 式の $E(|z_{t-1}|)$ は, $[2\sqrt{\nu-2}\Gamma((\nu+1)/2)] / [(\nu-1)\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi}]$ となる. (5)-(10) 式からなるモデルは, 収益率の平均と EGARCH モデルのパラメータが独立に switching を起こすモデルとなっている.

日経 225 の標本期間は 1995 年 9 月 13 日から 2014 年 9 月 10 日までである. MS-EGARCH モデルのパラメータの推定には, 最尤法を利用している. オプション評価の際には, 投資家のリスク中立性を仮定し, モンテカルロ・シミュレーションを用いてオプション価格を導出している. モンテカルロ・シミュレーションの分散減少法には, Satoyoshi and Mitsui [2011] と同様に制御変数法と負相関法を併せて用いている. 日経 225 オプションの標本期間は 2010 年 1 月限月から 2014 年 10 月限月までであり, 標本数はコール・オプションが 1120 である. 満期日まで 20 日のオプションの終値を対象としている. 無リスク資産としては, 無担保コール翌日物を用いている. モデルのパフォーマンス評価に関しては, MER と RMSER により行なっている. オプションのサンプルの偏りを調整するために, 原資産価格と権利行使価格との乖離率が非常に高いオプションに関しては, VDOTM, VDITM を追加し, マネネスは表 2 のように 7 種類のカテゴリーに分類している.

ここでは, コール・オプションの分析のみを行なっている. RMSER の基準では, 平均とボラティリティの両方が switching するモデルのパフォーマンスが特に良いというわけではないが, ボラティリティのみが switching する MS-EGARCH モデルは DOTM, OTM, 及び, 全体として優れており, EGARCH モデルを上回るという結果を得ている. ボラティリティのみが switching する MS-EGARCH モデルを用いたオプション評価法は, コール・オプションに対して有効である可能

性があることを示唆している。総合的にみると MS-EGARCH モデルは、MS モデルや BS モデルよりもパフォーマンスが高く、ボラティリティの switching は重要であるが、ブル・ベア局面を識別するための平均の switching は特に必要ではないことを明らかにしている。また、原資産の動きに関して日経 225 のトレンドを捉えるモデルとしては、平均のみが switching を起こすモデルで十分であり、ボラティリティの switching をモデルに含める必要は無いという結果を得ている。

3. 原資産収益率の分布の歪みを考慮したオプション評価

これまでの ARCH 型モデルを用いた日経 225 オプションの先行研究では、収益率の分布の歪みを考慮したモデルによる研究はなかった。そこで、里吉・三井 [2013] では、混合正規 GARCH モデルを応用し、ボラティリティの変動が EGARCH モデルに従う混合正規 EGARCH モデルを提案し、実証研究を行なっている。

混合正規 EGARCH モデルは、以下のように表現される。

$$R_t|I_{t-1} \sim \text{NM}(p_1, \dots, p_K; \mu_1, \dots, \mu_K; \sigma_{1t}^2, \dots, \sigma_{Kt}^2), \quad (11)$$

$$\ln \sigma_{it}^2 = \omega_i + \beta_i \ln \sigma_{i,t-1}^2 + \theta z_{i,t-1} + \gamma (|z_{i,t-1}| - E(|z_{t-1}|)), \quad (12)$$

$$z_{i,t-1} = [R_{t-1} - E(R_{t-1}|I_{t-2})] / \sigma_{i,t-1}, \quad i = 1, 2, \dots, K \quad (13)$$

ここで、 NM は、Normal Mixture を表す。(12) 式の $E(|z_{t-1}|)$ は $\sqrt{2/\pi}$ となる。ここでは、混合正規分布を構成する正規分布の数は 4 つとし、 $K = 4$ としている。また、株価収益率の分布は裾が厚いことが知られているため t 分布を成分とした混合 t 分布についても分析を行なっている。 ν を自由度とすると $K = 4$ の混合 t 分布は以下のように表される。

$$R_t|I_{t-1} \sim tM(p_1, \dots, p_4; \mu_1, \dots, \mu_4; \sigma_{1t}^2, \dots, \sigma_{4t}^2; \nu) \quad (14)$$

ここで、 tM は、 t Mixture を表す。このとき、(12) 式の $E(|z_{t-1}|)$ は、

$$[2\sqrt{\nu-2}\Gamma((\nu+1)/2)] / [(\nu-1)\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi}]$$

となる。このモデルを混合 t EGARCH モデルとする。

日経 225 の標本期間は 1991 年 2 月 26 日から 2009 年 12 月 9 日までである。混合 GARCH モデルのパラメータの推定には、最尤法を利用している。オプション評価の際には、投資家のリスク中立性を仮定し、モンテカルロ・シミュレーションを用いてオプション価格を導出している。モンテカルロ・シミュレーションの分散減少法には制御変数法と負相関法を併せて用いている。日経 225 オプションの標本期間は 2005 年 6 月限月から 2010 年 1 月限月までの 56 限月であり、標本数はコール・オプションが 741、プット・オプションが 816 である。満期日まで 30 日のオプションの終値を対象としている。無リスク資産としては、CD を用い、オプションが満期の 1 か月前であることから、CD も同じ 1 か月物にして、売り気配と買い気配の中間値を無リスク資産の利子率としている。モデルのパフォーマンス評価に関しては、MER と RMSER により行ない、マネネスは 7 種類のカテゴリーに分類している (表 2 を参照)。

実証研究の結果、コール・オプションでは混合正規 EGARCH モデルによる価格付けが最もパフォーマンスが良く、特に、VDOTM と DOTM のコール・オプションで顕著であることを明らかにしている。しかしながら、プット・オプションでは、混合正規 EGARCH モデルと混合 t EGARCH モデルの有効性は示されていない。B-S モデルが最も優れているという結果となっている。コー

ル・オプションとプット・オプションとの間で相反する結果となったため、更に1年ごとの期間に区切って分析を行なっている。サンプル期間を区切った分析では、時期によりコール・オプションとプット・オプションの双方においてパフォーマンスに違いが出ることを示している。特に、原資産の日経225が上昇トレンドの時期と下降トレンド時期では、モデルにより結果が異なることを示唆している。また、プット・オプションはヘッジの機能が強いいため、ボラティリティの変動とは違う要因で価格付けされている面が強いことを指摘している。

4. まとめ

本稿は、ARCH型モデルを応用した日経225オプションの実証分析に関してサーベイを行なった。MS-GARCHモデル、MS-EGARCHモデル、混合正規EGARCHモデル、混合 t EGARCHモデルによるオプション評価は、パフォーマンス評価の基準となっているB-Sモデルよりもオプション価格を正確に捉えることができるかどうか焦点を当て概観した。今後の展望としては、これらのモデルにより日経225オプションの実証分析を行ない、比較することが考えられる。また、高頻度データによるRealized Volatilityモデル⁴⁾やHansen *et al.* [2012]のRealized GARCHモデル⁵⁾などにより日経225オプションの実証分析が行なわれることが期待される。

参考文献

- [1] 里吉清隆・三井秀俊 [2013], 「原資産の収益率に歪みがある場合のオプション評価 混合正規EGARCHモデルによる分析」, 『日本統計学会誌』, 第43巻, 第1号, pp.1-23.
- [2] 里吉清隆・三井秀俊 [2016], 「日経平均株価のトレンドとオプション評価 マルコフ・スイッチングEGARCHモデルによる分析」, 日本証券経済研究所『証券経済研究』, 第96号, pp.59 - 82.
- [3] 三井秀俊 [2014a], 「ARCH型モデルによる日経225オプションの実証研究に関するサーベイ」, 日本証券経済研究所『証券経済研究』, 第87号, pp.41-60.
- [4] 三井秀俊 [2014b], 『ARCH型モデルによる金融資産分析』, 税務経理協会.
- [5] Hansen, P. R., Z. Huang and H. H. Shek [2012], “Realized GARCH: A Joint Model for Returns and Realized Measures of Volatility,” *Journal of Applied Econometrics*, 27, pp. 877-906.
- [6] Satoyoshi K. and H. Mitsui [2011], “Empirical study of Nikkei 225 options with the Markov Switching GARCH model,” *Asia-Pacific Financial Markets*, Vol.18, No.1, pp. 55-68.
- [7] Takeuchi-Nogimori, A. [2012], “An Empirical Analysis of Nikkei 225 Put Options Using Realized GARCH Models,” *Global COE Hi-Stat Discussion Paper Series*, 241, Hitotsubashi University. 12 Mar. 2013 <<http://gcoe.ier.hit-u.ac.jp/research/discussion/2008/pdf/gd12-241.pdf>>.
- [8] Ubukata M. and T. Watanabe [2014], “Pricing Nikkei 225 Options Using Realized Volatility,” *Japanese Economic Review*, Vol.65, No.4, pp. 431-467.

本資料に関する著作権は、株式会社大阪取引所にあります。

本資料の一部又は全部を無断で転用、複製することはできません。

本資料は、デリバティブ商品の取引の勧誘を目的としたものではありません。

⁴⁾Watanabe and Ubukata [2012] は、高頻度データによる Realized Volatility を使用して実証分析を行なっている。

⁵⁾Takeuchi-Nogimori [2012] は、高頻度データを使用し、Realized GARCH モデルにより日経225プット・オプションに関して分析を行なっている。しかし、Working Paper なので本稿のサーベイの対象とはしなかった。