

日経225先物のヘッジ比率の予測について

創価大学経済学部教授 浅井 学

1 はじめに

日経225先物取引とは、日経平均株価（日経225）を原資産とする株価指数先物取引であり、大阪取引所等に上場されている。本稿では高頻度データを用いて、日経225とその先物における最適ヘッジ比率の予測方法について比較分析を行う。

本稿の構成は以下の通りである。第2節前半では、最適な先物ヘッジ比率とその予測のための多変量GARCH（自己回帰型条件付き不均一分散）モデルを紹介する。また後半では、高頻度データによる推定において問題となるジャンプやマイクロストラクチャー・ノイズについて説明し、Koike (2016) による推定方法の特徴を述べる。第3節では、実証分析により予測モデルの比較を行う。

2 先物ヘッジ比率と実現共分散

2.1 先物ヘッジ比率と多変量GARCHモデル

日次データについて、時点 t における現物と先物の対数収益率をそれぞれ s_t と f_t と表記する。リスク回避的な投資家（ヘッジャー）が、原資産価格のリスクを軽減するために先物取引を使うとき、ポートフォリオの時点 t から $t+1$ の収益率は

$$r_{t+1} = s_{t+1} - \beta_t f_{t+1}$$

で表される。ただし β_t はヘッジ比率であり、時点 t において決定される。また、この投資家の期待効用関数は

$$E_t[U(r_{t+1})] = E_t(r_{t+1}) - \gamma \text{Var}_t(r_{t+1}) \quad (1)$$

で与えられるとする。ただし γ はリスク回避度（ $\gamma > 0$ ）である。また、 $E_t(r_{t+1})$ と $\text{Var}_t(r_{t+1})$ は、それぞれ時点 t までの情報集合 \mathcal{I}_t が与えられたときの r_{t+1} の期待値と分散であり、

$$\begin{aligned} E_t(r_{t+1}) &= E_t(s_{t+1}) - \beta_t E_t(f_{t+1}) \\ \text{Var}_t(r_{t+1}) &= \text{Var}_t(s_{t+1}) - 2\beta_t \text{Cov}_t(s_{t+1}, f_{t+1}) + \beta_t^2 \text{Var}_t(f_{t+1}) \end{aligned}$$

で与えられる。なお、 $\text{Cov}_t(s_{t+1}, f_{t+1})$ は、 \mathcal{I}_t が与えられたときの s_{t+1} と f_{t+1} の共分散である。このとき(1)式の期待効用を最大化するヘッジ比率 β_t は

$$\beta_t^* = \frac{E_t(f_{t+1}) + 2\gamma \text{Cov}_t(s_{t+1}, f_{t+1})}{2\gamma \text{Var}_t(f_{t+1})}$$

となる。さらに先物価格がマルチンゲール過程であるとすれば、 $E_t(f_{t+1}) = 0$ より、

$$\beta_t^* = \frac{\text{Cov}_t(s_{t+1}, f_{t+1})}{\text{Var}_t(f_{t+1})} \quad (2)$$

となる。

最適ヘッジ比率の推定値を求めるために、Baillie and Myers (1991) および Kroner and Sultan (1993) は多変量 GARCH モデルを用いている。またこの目的のため、Lai (2016) は実現共分散を使って、多変量 GARCH モデルを拡張している。Lai (2016) がベースにした多変量 GARCH モデルは、Baba et al. (1985) と Engle and Kroner (1995) により提案された BEKK (Baba-Engle-Kraft-Kroner) モデル

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} s_t \\ f_t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mu_s \\ \mu_f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{s,t} \\ u_{f,t} \end{pmatrix} \\ \mathbf{u}_t &= (u_{s,t}, u_{f,t})', \quad \mathbf{u}_t | \mathcal{I}_{t-1} \sim N(0, \mathbf{H}_t) \\ \mathbf{H}_t &= W'W + B'\mathbf{H}_{t-1}B + A'\mathbf{u}_{t-1}\mathbf{u}'_{t-1}A \end{aligned}$$

である。ここで、 A, B, W は 2 次元の正方行列であり、特に C は上三角行列である。ここで、 W のすべての対角要素がゼロでなければ、 $W'W$ は正定符号行列となる。この BEKK モデルの特徴の一つは、 $W'W$ と \mathbf{H}_0 が正定符号行列であれば、 \mathbf{H}_t は常に正定符号行列となることである。時点 t の実現共分散を RC_t とするとき、Lai (2016) は、BEKK モデルの $\mathbf{u}_{t-1}\mathbf{u}'_{t-1}$ を実現共分散で置き換えて、条件付き共分散のモデルを

$$\mathbf{H}_t = \begin{bmatrix} h_{ss,t} & h_{sf,t} \\ h_{fs,t} & h_{ff,t} \end{bmatrix} = W'W + B'\mathbf{H}_{t-1}B + A'\text{RC}_{t-1}A \quad (3)$$

と拡張している。本稿でも Lai (2016) のモデルを使って、現物と先物の収益率の共分散構造を推定し、ヘッジ比率の予測に用いる。時点 T から $T+1$ における最適ヘッジ比率は、(2) と (3) より

$$\beta_T^* = \frac{h_{sf,T+1}}{h_{ff,T+1}}$$

で与えられる。

2.2 実現共分散の推定

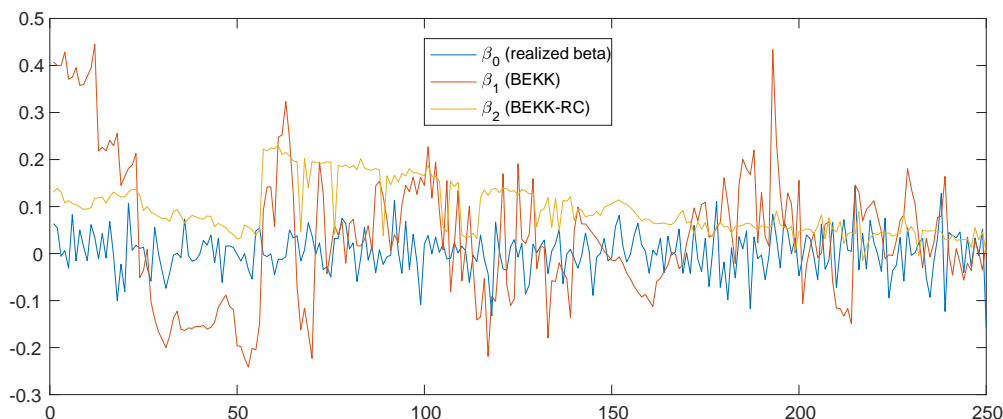
本稿では、実現共分散を求めるために Koike (2016) の方法を使う。実現共分散の推定方法としてよく使われているのは Barndorff-Nielsen et al. (2011) の実現カーネルと呼ばれるアプローチだが、Koike (2016) の方法は、実現カーネルと比べるとジャンプの効果を取り除ける点が優れている。さらに、収益率についてもマイクロストラクチャー・ノイズやジャンプの影響を取り除くことができる。

時点 s における 2 次元の対数価格のベクトルを $p(s) = (X_s, Y_s)$ とおき、観測できない真の対数価格ベクトル $p(s)^* = (X_s^*, Y_s^*)$ が BSMFAJ (Brownian semimartingale with finite-activity jumps) 過程に従うものとする。このとき、観測される対数価格は

$$X_{\tau_i} = X_{\tau_i}^* + \varepsilon_{\tau_i}^X \quad \text{and} \quad Y_{\theta_j} = Y_{\theta_j}^* + \varepsilon_{\theta_j}^Y, \quad (4)$$

で与えられるものとする。ただし、 $\varepsilon^X \sim \text{iid}(0, \sigma_{\varepsilon^X}^2)$ および $\varepsilon^Y \sim \text{iid}(0, \sigma_{\varepsilon^Y}^2)$ であり、 $(\varepsilon^X, \varepsilon^Y)$ は (X, Y) と独立であるとする。

図 1: ヘッジ比率の実現値と予測値



次に時点区間 $[0, T]$ における共変動 (QCov, quadratic covariation) の行列を

$$\text{QCov} = \text{plim}_{\Delta \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\lfloor T/\Delta \rfloor} [p(i\Delta) - p((i-1)\Delta)] [p(i\Delta) - p((i-1)\Delta)]'. \quad (5)$$

で定義する。また真の対数価格ベクトル $p(s)^*$ の BSMAJ 過程のうちブラウン運動半マルチンゲールの部分の共分散過程を $\Sigma(s)$ とし、ジャンプの係数行列を $K(s)$ とする。このとき、共変動行列 QCov は

$$\text{QCov} = \int_0^T \Sigma(s) ds + \sum_{0 < s \leq T} K(s)K'(s). \quad (6)$$

と分解される。この右辺第 1 項は累積共分散 (ICov, integrated co-volatility) 行列であり、右辺の第 2 項はジャンプによる共変動行列である。Koike (2016) は、Christensen et al. (2012) の方法を拡張して、共変動行列からジャンプによる影響を取り除いて、累積共分散を推定する方法を提案している。

時点 t における QCov 行列と ICov 行列について、Koike (2016) のアプローチによる推定値をそれぞれ $\hat{\Omega}_t$ および \hat{C}_t とする。このとき、ジャンプ共変動行列の推定値は $\hat{J}_t = \hat{\Omega}_t - \hat{C}_t$ で与えられる。Asai and McAleer (2017) では、さらに Aït-Sahalia and Jacod (2012) のアプローチを応用して、日次収益率を分割して、連続的な動きによる部分、ジャンプによる部分、またノイズによる部分に分けている。以下の実証分析では、収益率としてジャンプやノイズの影響を取り除いたものを使い、実現共分散には ICov の推定値を用いる。

3 実証分析

本稿では最適ヘッジ比率 β_T^* について、(3) 式による推定値と実現共分散による実現値 $\hat{C}_{sf,T+1}/\hat{C}_{ff,T+1}$ を比較する。データとして日経 225 の 15 秒間隔データと日経 225 先物価格の 1 分足データを用いて、第 2 節で説明したように、日次の収益率 (連続的な動きによる部分) と累積共分散行列の推定値

表 1: 予測値の比較

モデル	平均 2 乗予測誤差				期待効用の減少分		
	h_{ss}	h_{sf}	f_{ff}	β^*	$\gamma = 1$	$\gamma = 4$	$\gamma = 20$
BEKK	0.0550	0.0606	8.5307	0.0223	0.0231	0.1182	0.6252
修正 BEKK	0.0425	0.0080	0.7693	0.0132	0.0006	0.0277	0.1789

注) 平均 2 乗予測誤差では、実現共分散を真の値とした。また期待効用の推定値について、ヘッジ比率の実現値を使った場合の効用と比較したときの減少分を報告している。これは、数値が小さいほど実現値に近いことを示している。

を求めた¹。期間は 2013 年 11 月 14 日から 2016 年 12 月 8 日までの 750 日にわたるデータを使用する。日経 225 先物の限月は 3 月・6 月・9 月・12 月であるので、ある時点において限月の異なる収益率が複数存在する。Lai (2016) などのアプローチに従い、限月が直近のデータのみを使用する。

RC による修正 BEKK モデル (3) を使って、最後の 250 日間について 1 期先予測を行った。推定のための標本の大きさを $T = 500$ とし、最終日における共分散行列の 1 期先予測値 H_{T+1} を求め、最適ヘッジ比率 β_T^* を計算する。標本の大きさを固定したまま期間を一日ずらして、同様の 1 期先予測を 250 日分について行った。なお、比較のためのベンチマークとして、BEKK モデルを用いた。図 1 には、実現共分散によるヘッジ比率の実現値と、BEKK モデルによる予測値、修正 BEKK モデルによる予測値が図示されている。Lai (2016) で報告されている S&P500 先物のヘッジ比率は 1 に近い値をとっているが、日経 225 先物では図 1 のようにゼロに近い値をとっていることが見て取れる²。また図 1 から、修正 BEKK モデルのほうが変動が小さく、実現値に近いことがわかる。

次に、実現共分散を真の値として、平均 2 乗予測誤差を計算した。結果は表 1 にまとめられている。最適ヘッジ比率についても、修正 BEKK モデルのほうが平均 2 乗予測誤差は小さいといえる。最後に、(1) のポートフォリオを組んだときの期待効用の推定値を求めた ($\gamma = 1, 4, 20$)。表 1 の右側に結果がまとめられている。ヘッジ比率の実現値を使って期待効用を推定した場合に比べて、修正 BEKK モデルによる値は差が小さいが、BEKK モデルによる差が大きい。

以上より、修正 BEKK モデルを使って最適ヘッジ比率を予測する場合、BEKK モデルを使うよりも予測は改善されることがわかった。今回の分析では Lai (2016) のモデルを使ったが、さらにモデル改善して、ヘッジ比率の予測に役立てていきたい。

参考文献

- Aït-Sahalia, Y., and J. Jacod (2012), “Analyzing the Spectrum of Asset Returns: Jump and Volatility Components in High Frequency Data”, *Journal of Economic Literature*, **50**, 1007–1050.
- Asai, M. and M. McAleer (2017), “The Impact of Jumps and Leverage in Forecasting Co-volatility”, *Econometric Reviews* に掲載決定.
- Baba, Y., R. Engle, D. Kraft and K. Kroner (1985), “Multivariate Simultaneous Generalized ARCH”, Unpublished Paper, University of California, San Diego.

¹日経 225 のデータは日本経済新聞社インデックス事業室より、先物価格のデータは大阪取引所より提供して頂いた。

²この理由の一つとして、今回の分析では収益率や実現共分散からジャンプやマイクロストラクチャー・ノイズの影響を取り除いたデータを使用している点が挙げられる。

- Baillie, R.T. and R.J. Myers (1991), “Bivariate GARCH Estimation of the Optimal Commodity Futures Hedge”, *Journal of Applied Econometrics*, **6**, 109–124.
- Barndorff-Nielsen, O.E., P.R. Hansen, A. Lunde, and N. Shephard (2011), “Multivariate Realised Kernels: Consistent Positive Semi-Definite Estimators of The Covariation of Equity Prices with Noise and Non-Synchronous Trading”, *Journal of Econometrics*, **162**, 149–169.
- Christensen, K., S. Kinnebrock, and M. Podolskij (2012), “Pre-Averaging Estimators of the Ex-Post Covariance Matrix in Noisy Diffusion Models with Non-Synchronous Data”, *Journal of Econometrics*, **159**, 116–133.
- Engle, R.F. and K.F. Kroner (1995), “Multivariate Simultaneous Generalized ARCH”, *Econometric Theory*, **11**, 122–150.
- Koike, Y. (2016), “Estimation of Integrated Covariances in the Simultaneous Presence of Non-synchronicity, Microstructure Noise and Jumps”, *Econometric Theory*, **32**, 533-611.
- Kroner, K. F., and J. Sultan (1993), “Time-Varying Distributions and Dynamic Hedging with Foreign Currency Futures”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **28**, 535–551.
- Lai, Y.-S. (2016), “Hedge Ratio Prediction with Noisy and Asynchronous High-Frequency Data”, *Journal of Futures Markets*, **36**, 295–314.

<p>本資料に関する著作権は、株式会社大阪取引所にあります。 本資料の一部又は全部を無断で転用、複製することはできません。 本資料は、デリバティブ商品の取引の勧誘を目的としたものではありません。</p>
