

ボラティリティ・スプレッド

大阪大学 大学院経済学研究科
数理・データ科学教育研究センター 大屋幸輔

1 はじめに

大阪大学金融・保険教育研究センター（現：数理・データ科学教育研究センター）が2008年7月にモデルフリー・インプライド・ボラティリティである VXJ (Volatility Index Japan) を学術研究目的として公開を開始してすでに9年を越える年月が経った。その後、2010年11月に日本経済新聞社から日経平均 VI が公表され、2012年2月には大阪取引所では日経平均 VI 先物が取引されるなど、ボラティリティには多くの期待と関心が寄せられている。このインプライド・ボラティリティは株価指数との間に負の相関関係をもつことから、恐怖指数 (fear gauge) とも呼ばれている。市場の急変を告げる指数であるかのような別名から、多くのことを期待されている指数ではあるが、相関関係の存在は原因と結果といった因果関係までもを表しているのではないことには留意すべきである。しかしボラティリティの上昇は何らかのシグナルであることも確かである。学術研究においては、単なるサプライズ指数としてこのボラティリティを利用するだけにとどまるものもあるが、インプライド・ボラティリティの理論的算出根拠に立ち戻り、市場参加者のリスクに対するスタンスをとらえる道具として様々な観点から研究が進んでいることも事実である。本稿では一例として Bakshi and Madan (2006) の議論にもとづき、インプライド・ボラティリティ、そして実現ボラティリティとの差をもとに定義されるボラティリティ・スプレッドについて論じていく*1。

2 理論的枠組み

まずインプライド・ボラティリティが表すものを明確にするためにリスク中立確率測度 \mathcal{Q} と実確率測度 \mathcal{P} について整理していく。はじめに t 時点での株価指数を $S(t)$ 、その s 期間収益率を $R(t, s) = \log S(t+s)/S(t)$ 、また単に R と表す。この収益率 R の実確率密度とリスク中立確率密度をそれぞれ $p(R)$ 、 $q(R)$ とする。連続確率変数は、その確率分布および確率密度によって特徴付けられるが、ここでの収益率 R の確率的な特性はその確率密度 $p(R)$ によって表されている。一方、リスク中立確率密度 $q(R)$ は、プライシング・カーネル (確率的割引ファクター) を $m(R)$ とすると、 $m(R) = d\mathcal{Q}/d\mathcal{P} = q(R)/p(R)$ であり、

$$q(R) = \frac{m(R)p(R)}{\int m(R)p(R) dR} = p(R) \times \frac{m(R)}{\int m(R)p(R) dR} \quad (1)$$

と表現される。 $q(R)$ は投資家のリスクに対する選好を $m(R)/\int m(R)p(R) dR$ (あるいは単に $m(R)$) をとおして $p(R)$ に反映させたもので、これをリスク中立確率密度と呼んでいる。以降、実確率測度 \mathcal{P} 、リスク中立確率測度 \mathcal{Q} のもとでの収益率 R の4次までの絶対モーメントが存在していると仮定し、平均 μ 、分散 σ^2 、歪度 θ 、尖度 κ をそれぞれ以下のように定義しておく。

$$\begin{aligned} \mu_p &= E_{\mathcal{P}}[R], \quad \sigma_p^2 = E_{\mathcal{P}}[(R - \mu_p)^2], \quad \theta_p = E_{\mathcal{P}}[(R - \mu_p)^3]/(\sigma_p^2)^{3/2}, \quad \kappa_p = E_{\mathcal{P}}[(R - \mu_p)^4]/(\sigma_p^2)^2, \\ \mu_q &= E_{\mathcal{Q}}[R], \quad \sigma_q^2 = E_{\mathcal{Q}}[(R - \mu_q)^2], \quad \theta_q = E_{\mathcal{Q}}[(R - \mu_q)^3]/(\sigma_q^2)^{3/2}, \quad \kappa_q = E_{\mathcal{Q}}[(R - \mu_q)^4]/(\sigma_q^2)^2 \end{aligned}$$

*1 分散の平方根である標準偏差に対応するものをボラティリティと呼ぶが、Bakshi and Madan (2006) がそうであるように、本稿でも混乱を生じない限り、分散 (バリエンス) に対しても、ボラティリティという呼称を使う。

Bakshi and Madan (2006) は 2 つの確率測度のもとで得られる分散の差に関して、ボラティリティ・スプレッドとよぶ以下の

$$\frac{\sigma_q^2 - \sigma_p^2}{\sigma_p^2} \approx -\mathcal{A}_1 (\sigma_p^2)^{1/2} \theta_p + \frac{\mathcal{A}_2}{2} \sigma_p^2 \left\{ \kappa_p - 1 - \frac{2\mathcal{A}_1^2}{\mathcal{A}_2} \right\}, \quad (2)$$

$$\mathcal{A}_1 = -\partial m / \partial R |_{R=0}, \quad \mathcal{A}_2 = \partial^2 m / \partial R^2 |_{R=0}$$

を導いている。このボラティリティ・スプレッド (2) は実確率測度のもとでの分散で基準化されているが、分子は分散リスクプレミアム (Variance Risk Premium) とよばれる量になっている。

ここでプライシング・カーネルに関する追加的な仮定として、リスク回避度を γ とする $m(R) = \exp(-\gamma R)$ を課すと

$$\frac{\sigma_q^2 - \sigma_p^2}{\sigma_p^2} \approx -\gamma (\sigma_p^2)^{1/2} \theta_p + \frac{\gamma^2}{2} \sigma_p^2 (\kappa_p - 3) \quad (3)$$

を得る*2。右辺は実確率測度のもとでの収益率 R の 2 次, 3 次, さらに 4 次のモーメントとリスク回避度で表されており、仮に投資家がリスク中立的 ($\gamma = 0$) であれば、ボラティリティ・スプレッド、分散リスクプレミアムはゼロとなる。あるいはリスク回避的 ($\gamma > 0$) であったとしても、収益率 R の実確率測度 \mathcal{P} がガウス型、すなわち R が正規分布に従っている場合は、 $\theta_p = 0$, $\kappa_p = 3$ であることより、やはりボラティリティ・スプレッド、分散リスクプレミアムはゼロとなる。しかし、多くの先行研究が明らかにしている負の歪度 θ_p , 正規分布よりも大きい尖度 κ_p (3 よりも大) という収益率 R に関する統計的事実からは、投資家がリスク回避的であれば、この分散リスクプレミアムは正の値をとることが導かれる。Bakshi and Madan (2006) はボラティリティ・スプレッド (3) が正の大きな値を示す状況について以下のようにまとめている。

- 投資家のリスク回避度 γ が大きい
- 収益率 R の実確率測度のもとでの確率密度 $p(R)$ が負の方向に (正規分布と比べて)、より歪んでいる
- 収益率 R の実確率測度のもとでの確率密度 $p(R)$ の裾が (正規分布と比べて)、より厚い

次節ではここで示されているボラティリティ・スプレッドと収益率の高次のモーメントの関係が日本の株式市場においてどのように現れてくるのか、さらにリスク回避度がどのような値を示しているのかを日経平均株価を例にとり見ていくことにする。

3 実証例

日経平均株価の収益率 R の実確率測度 \mathcal{P} のもとでの分散 σ_p^2 , 歪度 θ_p , 尖度 κ_p とリスク中立測度 \mathcal{Q} のもとでの分散 σ_q^2 が観測されれば、ボラティリティ・スプレッド (3) よりリスク回避度 γ を推定することができる。実確率測度のもとでの収益率の高次のモーメントは、高頻度観測データによる実現分散 (Realized Variance) など、対応する実現モーメントで推定可能であり、リスク中立測度のもとでの σ_q^2 に関しては日経 225 オプション価格から計算されるインプライド・ボラティリティを 2 乗したインプライド分散を利用することができる。リスク回避度 γ の推定に利用するデータの観測頻度は Bakshi and Madan (2006) と同様に月次とする。

*2 Bakshi and Madan (2006) は他のタイプのプライシングカーネル $m(R)$ とボラティリティ・スプレッドとの関係も考察しているが、実際のデータによる分析では $m(R) = \exp(-\gamma R)$ を採用している。

日中の5分毎の日経平均株価からもとめられる収益率を2乗した値を合計したものが日次の実現分散であるが、本稿では各月のすべての取引日の日次の実現分散を合計して月次の実現分散 RV としている。ただし取引開始時刻の5分後の9時5分から9時10分の収益率を各取引日の最初の収益率としている*3。第 i 番目の月の第 j 番目の収益率を $R_i(j)$ 、 n_i を第 i 月の5分間収益率の総数とすると、第 i 月の実現分散は

$$RV_i = \sum_{j=1}^{n_i} R_i^2(j) \tag{4}$$

となる。実現ボラティリティ (Realized Volatility) は実現分散の平方根として定義される。実現歪度 (Realized Skewness) と実現尖度 (Realized Kurtosis) に関しては Amaya et al. (2015) に従い

$$RSkw_i = \frac{\sqrt{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} R_i^3(j)}{RV_i^{3/2}}, \quad RKrt_i = \frac{n_i \sum_{j=1}^{n_i} R_i^4(j)}{RV_i^2}, \tag{5}$$

とした。実現モーメントを算出するための標準期間は1998年1月5日から2017年2月28日で、得られた月次の実現モーメントは1998年1月から2017年2月、そしてこれらを図示したものが図1である*4。

図1の実現ボラティリティは世界的金融危機の頃に対応する2008年10月に大きな値をとった後、金融危機前と比べて若干低い水準で推移している。一方、実現歪度はその水準はほぼゼロであるが、2010年1月以

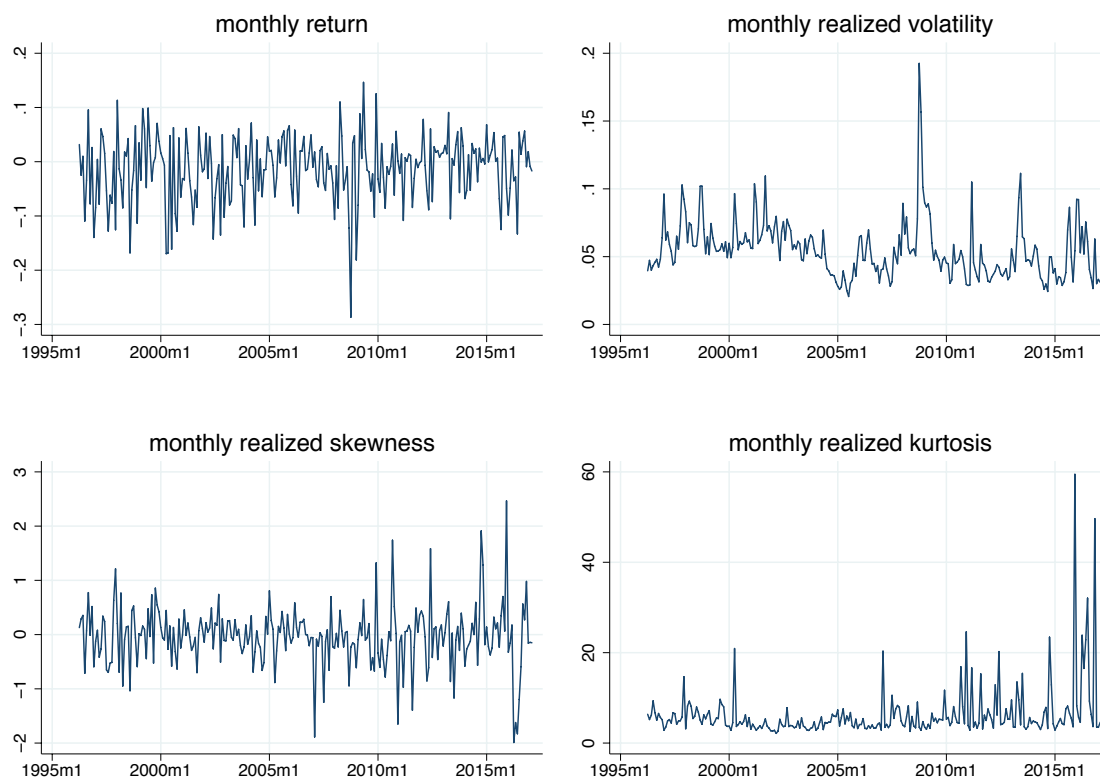


図1: 収益率 (上段左), ボラティリティ (上段右), 歪度 (下段左), 尖度 (下段右)

*3 ここでは昼休みや夜間を考慮した実現分散の補正は行なっていない。

*4 定義にもとづいて算出された月次の実現モーメントを各月の営業日数 n_i を考慮して年率に変換したのち、再度、月率に変換している。

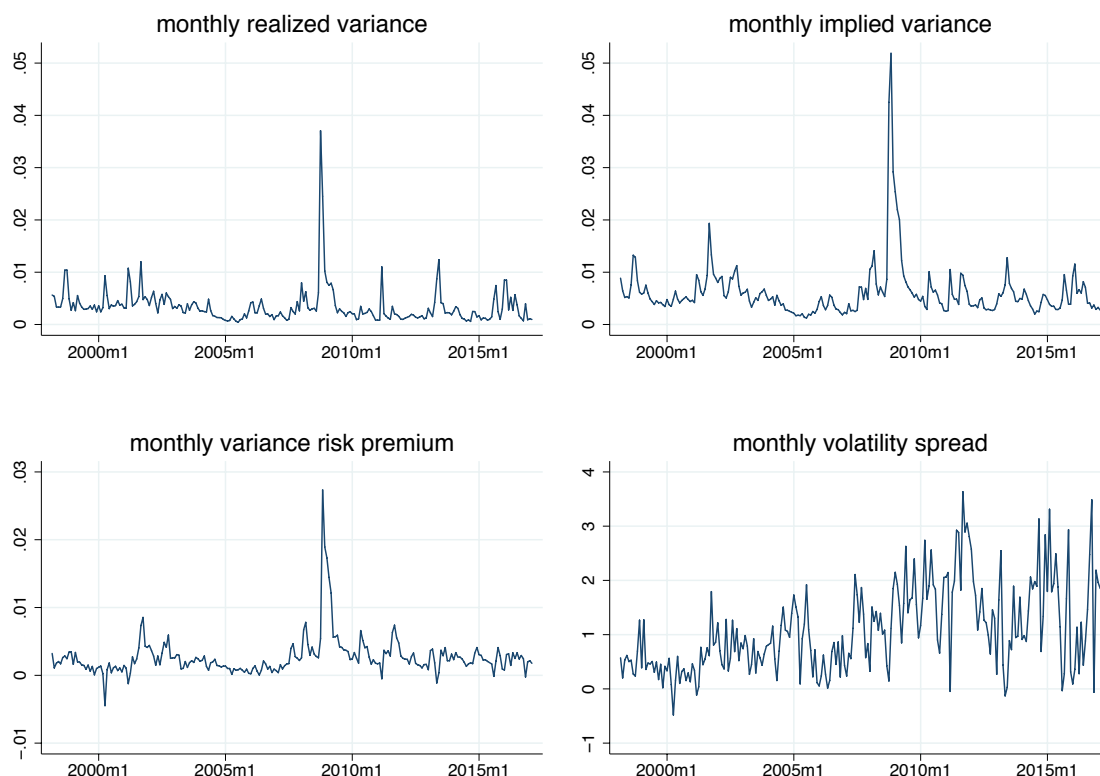


図 2: 実現分散 (上段左), インプライド分散 (上段右), 分散リスクプレミアム (下段左), ボラティリティ・スプレッド (下段右)

降その変動幅が大きくなっている。また実現尖度も同時期からその変動幅が増大しているが、これは東京証券取引所が導入したアローヘッドの稼働開始時期と一致する。

ボラティリティ・スプレッド $(\sigma_q^2 - \sigma_p^2) / \sigma_p^2$ をもとめるには、さらにリスク中立測度のもとでのインプライド分散 σ_q^2 が必要となるが、これは大阪大学数理・データ科学教育研究センターが公開しているボラティリティ指数 VXJ (Volatility Index Japan) を 2 乗し、月率に変換したものをもちいた^{*5}。図 2 は算出された月次の実現分散、インプライド分散、分散リスクプレミアム、ボラティリティ・スプレッドである。ボラティリティ・スプレッド、分散リスクプレミアムの符号はリスク回避度、実確率測度のもとでの確率密度 $p(R)$ に依存することは既に説明したが、表示されている期間ではほぼ正の値を示している^{*6}。

これら高次の実現モーメントとインプライド分散をもちいると、ボラティリティ・スプレッドを介してリスク回避度 γ を推定することができる。分析方法に関しては Bakshi and Madan (2006) を踏襲する^{*7}。ボラティリティ・スプレッドに関しては、プライシング・カーネルを $m(R) = \exp(-\gamma R)$ とした (3) が成立していると仮定し、GMM 法によって未知パラメータ γ の推定を行う。推定に利用した操作変数は定数と 1 時点前と 2 時点前のインプライド分散をもちいた。2008 年 10 月の金融危機、2010 年 1 月のアローヘッド稼働

^{*5} VXJ は学術研究目的のため大阪大学数理・データ科学教育研究センター (旧金融・保険教育研究センター) の web ページ <http://www-mmds.sigmath.es.osaka-u.ac.jp/structure/activity/vxj.php> で公開されている。

^{*6} ただし実現分散の算出に、昼休み、夜間、さらに取引開始後の最初の 5 分間を考慮していない点は留意すべきである。

^{*7} 同様な分析に Yoon and Byun (2012) があるが、実確率測度のもとでのモーメントの推定には日次データをもちいている点为本稿とは異なる。

表1 推定結果

	$\hat{\gamma}$	頑健標準誤差	95% 信頼区間	J 検定統計量	p 値
期間1：1998/03 – 2004/12	13.446	1.523	[10.461 16.430]	3.292	0.193
期間2：2005/01 – 2012/01	19.208	1.710	[15.856 22.561]	1.086	0.581
期間3：2010/02 – 2017/02	12.865	1.616	[9.699 16.032]	0.359	0.836

という事象を考慮して、分析対象期間である1998年3月から2017年2月を表1にあるように3つの期間に分けて推定を行なった*8。プライシング・カーネルの仮定に関わる定式化(3)の検証はBakshi and Madan (2006)と同様に J 検定統計量によって行い、3つの期間において定式化の誤りはなかったと判断した。またリスク回避度 γ の推定値は金融危機の時期を含む期間2でその値を上昇させた後、期間3では期間1の水準に近い値に戻っていることが明らかになった。リスク回避度は市場で直接観測されるものではないがボラティリティ・スプレッドを介して推定することが可能であり、ここでは市場参加者のリスクに対するスタンスが市場をとりまく経済状況により変化している様子がとらえられている。

4 おわりに

市場の動向を予測するため有用とされるインプライド・ボラティリティであるが、それが導出される理論的基礎に立ち戻れば、市場におけるリスクに関して更に踏み込んだ分析が可能である一例を先行研究を例にとりながら紹介した。プライシング・カーネルの特定化、実確率測度のもとでのモーメントの推定におけるマイクロストラクチャー・ノイズの影響の除去など様々な課題が未だ残されているが、それらに関しては別の機会に論ずることにしたい。

参考文献

- Amaya, D., Christoffersen, P., Jacobs, K. and Vasquez, A. (2015), “Does realized skewness predict the cross-section of equity returns ?,” *Journal of Financial Economics*, Vol. 118, No. 1, 135–167.
- Bakshi, G. and Madan, D. (2006), “A Theory of Volatility Spread,” *Management Science*, Vol. 52, No. 12, 1945–1956.
- Yoon, S. J. and Byun, S. J. (2012), “Implied Risk Aversion and Volatility Risk Premiums,” *Applied Financial Economics*, Vol. 22, No. 1, 59–70.

本資料に関する著作権は、株式会社大阪取引所にあります。
 本資料の一部又は全部を無断で転用、複製することはできません。
 本資料の内容は、株式会社大阪取引所の意見・見解を示すものではありません。
 本資料は、デリバティブ商品の取引の勧誘を目的としたものではありません。

*8 期間2は推定にもちいる標本サイズを十分に確保するため期間3と一部重複している。期間毎の標本サイズは期間1から期間3で、それぞれ82, 85, 85である。