

非対称確率的分散変動モデルによる 日経 225 先物の分析¹⁾

日本大学経済学部教授 三井秀俊

1. はじめに

本稿では、非対称確率的分散変動モデル (Asymmetric Stochastic Volatility Model) を用いて日経 225 先物価格収益率とボラティリティとの関係について実証的な検証を行なう。株価収益率のボラティリティ (volatility) は経験的な事実として時間を通じて確率的に変動していることが知られており、ボラティリティが確率的に変動する代表的なモデルとして SV モデル (Stochastic Volatility Model) がある²⁾。SV モデルはボラティリティを観測されない変数として扱い、ボラティリティの対数が自己回帰の線形確率過程に従うとしてモデル化されている。株式市場には、株価収益率とボラティリティとの関係として、ある種の非対称 (asymmetry) な動きがあることが知られている。つまり、株価収益率が下落すると、次期にはボラティリティは上昇し、株価収益率が上昇すると、次期にはボラティリティは下落する傾向があるとしている (leverage effects)。これは、株価収益率とボラティリティの間には負の相関があることを示唆している。株価指数先物市場でもこのような現象があるならば、株価指数先物およびオプション等の価格付けやヘッジに応用できると考えられる³⁾。既に SV モデルに関する先行研究では資産価格収益率の分布の特性を考慮し、誤差項の分布に t 分布や非対称分布を仮定し⁴⁾、また、様々なモデルの拡張⁵⁾が行なわれているが、本稿では単純な非対称 SV モデルにより日経 225 先物についての分析を行なう。

2. 分析モデル

t 時点の日経 225 先物の収益率を R_t とする。 P_t を t 時点の日経 225 先物価格の水準とすると、 t 時点の日経 225 先物の収益率 R_t は以下のように表される。

$$R_t = (\ln P_t - \ln P_{t-1}) \times 100 . \quad (1)$$

¹⁾本研究は、平成 29 年度日本大学経済学部在外研究員制度 (短期 1 か月) による助成を受けている。

²⁾SV モデルに関して主要な論文を集めた論文集である Shephard [ed.] (2005) が大変参考になる。

³⁾SV モデルのデリバティブズへの応用として詳しくは、Bergomi (2016) を参照。

⁴⁾例として、中島・大森 (2011) を参照。

⁵⁾例として、石原・大森 (2008) を参照。

時系列モデルのパラメータの推定には離散時間データの集合が使われるため、離散時間 SV モデルを構築する。離散時間 SV モデルは収益率 R_t とボラティリティ σ_t^2 の過程を以下のように記述する。

$$R_t = \sigma_t u_t, \quad (2)$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2) + \eta_t, \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim i.i.d.N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix} \right), t = 1, \dots, T.$$

ここで、 u_t は平均 0、分散 1、 η_t は平均 0、分散 σ_η^2 の正規分布にしたがう誤差項である⁶⁾。(3) 式は、ボラティリティの対数値が AR(1) プロセス (first-order autoregressive process; 1 次の自己回帰過程) に従うことを示している。株式市場によく見られるある種の非対称な動きをモデルに与えるには、(2)、(3) 式での u_t と η_t に対して相関関係を考えれば良い。前日の株価収益率がボラティリティに与える影響を捉えるために、ボラティリティの変動を 1 期先行させる。 u_t と η_t とが、相関係数 ρ を持つとし離散時間 SV モデルを構築すると、

$$\begin{pmatrix} u_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim i.i.d.N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho\sigma_\eta \\ \rho\sigma_\eta & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix} \right), t = 1, \dots, T \quad (4)$$

となる。上記の SV モデルとの相違点は、 u_t と η_t とが相関係数 ρ を持つということである。(2)、(3)、(4) 式では、未知のパラメータは、 $\{\alpha, \beta, \sigma_\eta^2, \rho\}$ である。ここで、非対称性を示すパラメータは相関係数 ρ である。SV モデルは尤度を求めることが難しいため、カルマン・フィルター (Kalman Filter) によって求まる疑似尤度を最大化する疑似最尤法 (QML: Quasi-Maximum Likelihood estimation) によりパラメータの推定を行なう。

3. 実証分析

3.1 データ

本稿では、データとして大阪取引所で取引されている日経 225 先物の期近物を使用する。日中に取引される日経 225 先物を研究対象とし、ナイト・セッションに関しては研究対象としない⁷⁾。データは、日経 NEEDS-FinancialQuest からデータを取得した。データの期

⁶⁾(2)、(3) 式は、 $\psi^2 \exp(h_t) \equiv \sigma_t^2$ とすると以下のように書き換えられる。

$$R_t = \psi \exp\left(\frac{h_t}{2}\right) u_t,$$

$$h_t = \phi h_{t-1} + \eta_t.$$

ここで、 ψ はスケール・パラメータ (scale parameter) を表す。多くの実証研究では、上記の表記が多い。本研究では、ボラティリティの過程が平均回帰性を持つモデルを扱うので (3) 式の表記を用いた。

⁷⁾本研究では、CME (Chicago Mercantile Exchange) や SGX-DT (Singapore Exchange Derivatives Trading Limited) で取引されている日経 225 先物も対象外とする。

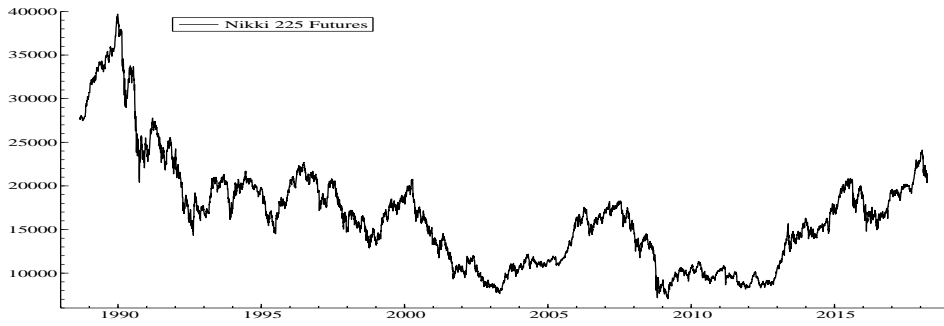


図 1: 日経 225 先物終値 (1988/9/3 – 2018/3/30)

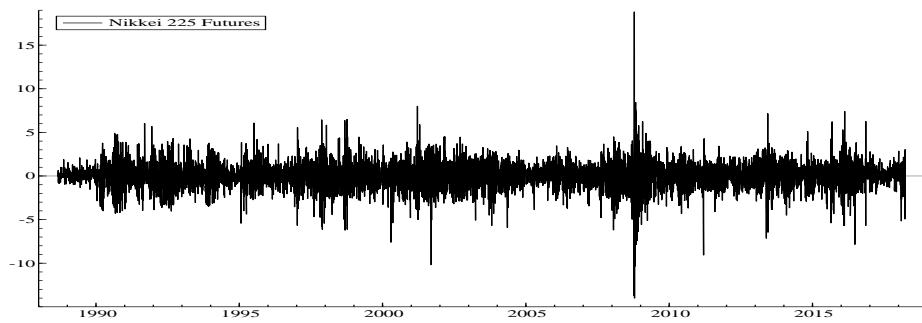


図 2: 日経 225 先物日次収益率 (1988/9/5 – 2018/3/30)

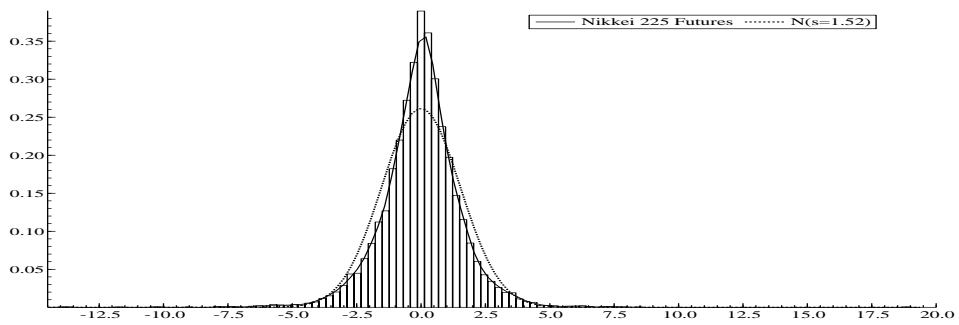


図 3: ヒストグラムと密度関数 (1988/9/5 – 2018/3/30)

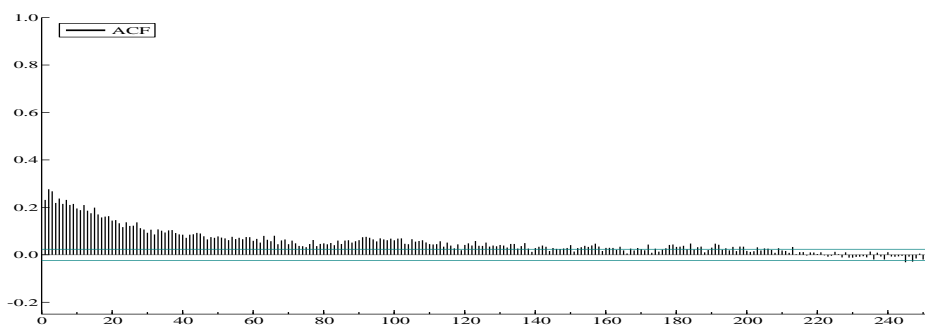


図 4: $|R_t|$ の自己相関 (1988/9/5 – 2018/3/30)

表 1: 日経 225 先物収益率 R_t (%) の基本統計量

標本期間：1988/9/5 – 2018/3/30

標本数	平均	標準偏差	歪度	尖度	最大	最小	正規性検定
7,279	-0.003	1.525	-0.189	11.17	18.81	-14.00	5581.9**

** は有意水準 1% で有意であることを示す。

間は、1988 年 9 月 3 日⁸⁾ から 2018 年 3 月 30 日までである (図 1 を参照)。収益率は、各々の先物取引終値の変化率 (%) として計算した (図 2 を参照)。サンプル期間は、1988 年 9 月 3 日から 2018 年 3 月 30 日までであり、標本数は 7,279 である。

データの基本統計量として、平均、標準偏差、歪度、尖度、最大値、最小値、正規性の検定統計量⁹⁾ が表 1 に纏められている。日経 225 先物の収益率に関しては、尖度の値が 3 を超えていることから、また、正規性検定が有意なことから、日経 225 先物の収益率の分布は正規分布よりも裾が厚いことがわかる。日経 225 先物の収益率のヒストグラム・密度関数は、図 3 に描かれている。ここでは、密度関数と正規近似が重ねて描かれている。 $N(s = 1.525)$ は、表 1 より正規近似が平均 -0.003 、分散が 1.525^2 の正規分布 $N(-0.008, 1.643^2)$ に従うことを表している。図 4 には、 $|R_t|$ の自己相関が描かれている。図 4 から $|R_t|$ の自己相関の減衰が非常に遅いことがわかる。これは、 $|R_t|$ の系列は長期記憶性 (long memory, long term dependence) があることを示唆している。

3.2 実証結果

表 2 は非対称 SV モデルの推定結果を示した。相関係数を表すパラメータ ρ は統計的に有意な負の値 -0.386 となった。よって、日経 225 先物価格収益率とボラティリティとの間には負の相関があることが検証された。これは日経 225 先物が下落した翌日にボラティリティが、より上昇する傾向があることを示している。また、 β の推定値が 1 に近いということは、ボラティリティのショックが高い持続性 (persistence) を持つことを意味し、過去の研究と整合的な結果となっている。

4. まとめ

本稿は、非対称 SV モデルを用いて日経 225 先物のボラティリティに関して分析を行なった。日経 225 先物価格収益率とボラティリティとの間の関係に焦点を当て実証的な検証を

⁸⁾ 日経 225 先物の取引開始日である。

⁹⁾ 収益率分布の正規性検定を行なう際に、歪度と尖度を用いる Jarque-Bera の方法を利用した。

表 2: 非対称 SV モデルの推定

$$R_t = \sigma_t u_t$$

$$\ln(\sigma_{t+1}^2) = \alpha + \beta \ln(\sigma_t^2) + \eta_t$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim i.i.d.N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho\sigma_\eta \\ \rho\sigma_\eta & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix} \right), t = 1, \dots, T$$

	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\sigma}_\eta$	$\hat{\rho}$	$Q(20)$	$Q^2(20)$	$\ln L$
推定値	0.037*	0.925*	0.169*	-0.386*	19.97	18.96	-12584.05
標準誤差	0.008	0.018	0.025	0.058			

(i) * は有意水準 5 % で有意であることを示す。

(ii) $Q(20)$ と $Q^2(20)$ は、各々 20 次までの基準化した残差 ($\hat{\epsilon}\hat{\sigma}^{-1}$) とその 2 乗の

Ljung - Box の Q 統計量を表す。漸近的に自由度 20 の χ^2 分布に従う。

行なった。実証分析の結果として、日経 225 先物価格収益率とボラティリティとの間には負の相関があることが示された。また、日経 225 先物のボラティリティの分析に関して、非対称 SV モデルを用いることは有効であることがわかった。

今後の課題としては、本稿では日中に取引される日経 225 先物の期近物の終値のみを使用しているため、ナイト・セッションも含めて分析を行なうことが考えられる。また、黒瀬 (2013) で示されているような相関が時間変動する非対称 SV モデルで分析を行なうことが必要である。当然ながら先行研究で示されているように、日経 225 先物に関して Markov-switching モデル¹⁰⁾ や長期記憶性¹¹⁾ を考慮した非対称 SV モデルにより分析を行なうことは重要であると思われる。

参考文献

- [1] 石原庸博・大森裕浩 (2008), 「TOPIX 収益率のマルコフ・スイッチング非対称確率的ボラティリティ変動モデルによる分析」, MTP フォーラム・日本ファイナンス学会『現代ファイナンス』, No.24, pp. 75-100.
- [2] 黒瀬雄大 (2013), 「時間変動する相関と確率的ボラティリティモデル」, 日本取引所グループ『先物・オプションレポート』, Vol.25, No.11, pp.1-6.
- [3] 中島上智・大森裕浩 (2011), 「一般化双曲線非対称 t 分布を用いた確率的ボラティリティ変動モデルの推定と株価収益率データへの応用」, 日本統計学会『日本統計学会誌』, 第 40 巻, 第 2 号, pp. 61-88.
- [4] 三井秀俊 (2013), 「長期記憶モデルによる日経 225 先物のボラティリティに関する実証分析」, 日本取引所グループ『先物・オプションレポート』, Vol.25, No.6, pp.1-6.
- [5] 三井秀俊 (2015), 「日経 225 先物のブル・ベア相場の分析」, 日本取引所グループ『先物・オプションレポート』, Vol.27, No.11, pp. 1-5.
- [6] Bergomi, L.(2016), *Stochastic Volatility Modeling*, Chapman and Hall/CRC.

¹⁰⁾日経 225 先物に関する分析として、三井 (2015) を参照。

¹¹⁾日経 225 先物に関する分析として、三井 (2013) を参照。

[7] Shephard, N. [ed.] (2005), *Stochastic Volatility: Selected Readings*, Oxford University Press.

本資料に関する著作権は、株式会社大阪取引所にあります。

本資料の一部又は全部を無断で転用、複製することはできません。

本資料の内容は、株式会社大阪取引所の意見・見解を示すものではありません。

本資料は、デリバティブ商品の取引の勧誘を目的としたものではありません。