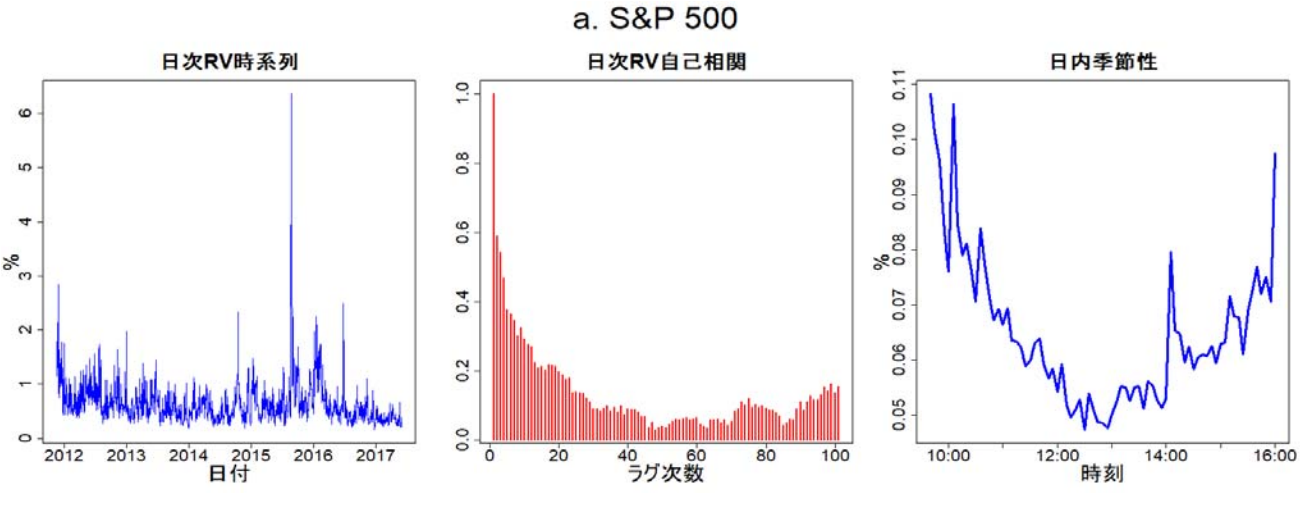
日経平均ボラティリティの日内季節性

甲南大学経済学部　石田　功

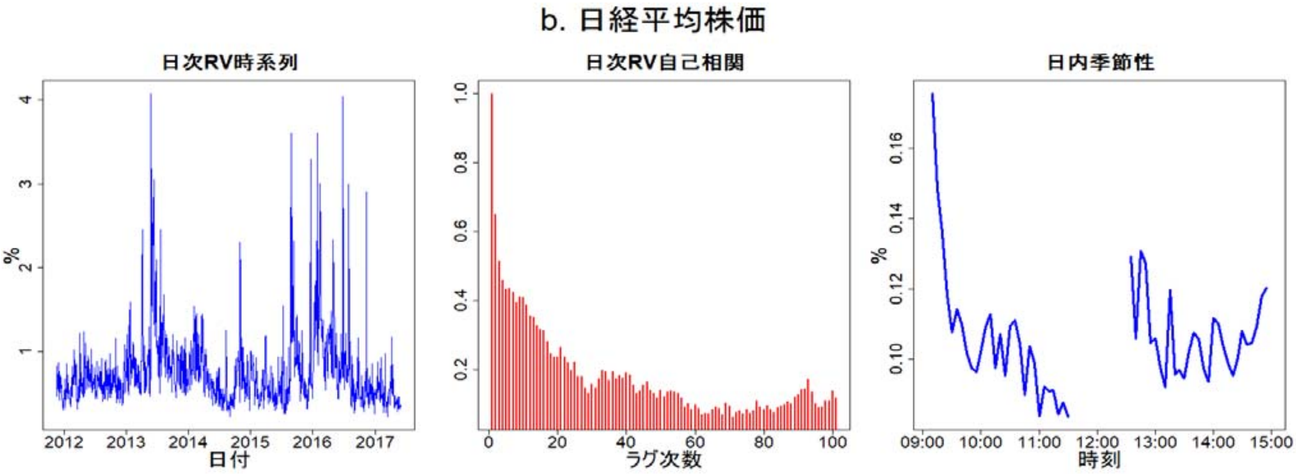
1. はじめに

株価や為替レートのボラティリティが示す顕著な性質としては、日次水準の部分的に予測可能な確率変動に加え、日内季節性が良く知られている[1]。例えば、図 1 は米国 S&P 500 種株価指数と日経平均株価それぞれの 2011 年 11 月 21 日（東京証券取引所の現物株式取引が現行の時間帯になった日）から 2017 年 5 月 31 日までの日次実現ボラティリティ（RV）の時系列と自己相関関数及び日内季節性のプロットである[2]。日内季節性プロットは取引時間内各 5 分インターバル[3]の変化率の時系列標準偏差を示すもので、日内の瞬間的ボラティリティが平均的にはオープンと大引け近くで高くセッション半ばで低い U 字型（日経平均は昼休みを反映して W 字型。ただし、前場引けにかけての上昇は見られない）に推移するという、顕著な非定常性が見てとれる。

図 1



1 例えば、Cho and Daigler (2012)は、金融市場の日内季節性の市場マイクロストラクチャー理論、統計モデル及び実証分析の文献をサーベイしている。なお、本稿では各種の分散の標準偏差をボラティリティと呼ぶ。
2 本稿では、実現ボラティリティとして各日の現物株式取引時間内の 5 分間変化率の 2 乗和の平方根を採用した。実現ボラティリティについては、例えば、Andersen et al. (2003) 参照。データに S&P500 は TickData 社指数ティックデータ、日経平均株価は日経メディアマーケティング株式会社 NEEDS 株価指数ティックデータを用いた。
3 取引開始後最初の 5 分間は大きな値であるためこの図には表示していない。日経平均株価については昼休み 11：30～12:30 の変化率を除外した。



日内の瞬間的ボラティリティの計測・予測においてはこの日内季節性を正確に捉えることがキーとなるが、これを時間の決定論的関数と仮定し推計する研究が多かった。しかし、最近、Cho and Daigler (2012, 2014)（以下 C-D）はボラティリティの日内季節性パターンの確率的変動を捉える時系列モデルとして自己回帰条件付季節分散（autoregressive conditional seasonal variance; 以下 ARCSV）モデルを提案、S&P 500 先物、畜牛先物、円・ドル現物為替レート等の高頻度データに適用する実証研究を行い、これら時系列に含まれる日内季節性の予測可能な確率変動の存在を示した。以下、本稿では ARCSV モデルについて簡単に紹介し、日経平均株価データへの適用例を報告する。

2. ARCSV モデルの概略

各日の取引時間を N 個の等間隔時間インターバルに分割するものとし、$r_{t|n}$を第 t 日第 n インターバルの対数変化率、$\sqrt{h_t}$を第 t 日 1 日間の変化率（オープン・クローズ、昼休み等がある場合はその時間の変化率を除く）のボラティリティ、$\sqrt{s_{t|n}}$をボラティリティの日内季節調整項とする。ARCSV モデルは $r_{t|n}$が次式に従うとする[4]：

$$r_{t|n} = \sqrt{\frac{h_t}{N} s_{t|n}}\, v_{t|n},\ n = 1, \ldots, N, \tag{1}$$

$$s_{t|n} = \omega_n + \alpha_n \varepsilon_{t-1|n}^2 + \beta_n s_{t-1|n} \tag{2}$$

$$\varepsilon_{t|n} = \frac{r_{t|n}}{\sqrt{h_t/N}} = \sqrt{s_{t|n}}\, v_{t|n} \tag{3}$$

$$v_{t|n} \sim i.i.d.(0,1), \qquad \mathrm{Cov}\left(h_t, s_{t|n}\right) = \mathrm{Cov}\left(s_{t|n}, v_{t|n}\right) = 0$$

モデルの特徴は、日内季節調整項 $s_{t|n}$ が定数ではなく日々確率的に変動すること、また、その変動過程は日内インターバル毎に標準化誤差項$\varepsilon_{t|n}$の日次 GARCH (1,1) 過程に従うこ

[4] ここでは C-D の定義を若干単純化したバージョンを示した。例えば、季節調整項のモデル式(2)はより一般的には GARCH(p,q)。

とである（α_n, β_nはインターバル毎に異なり得る）。C-D はモデル推定方法として、まず第 1 ステップで $r_{t|n}$観測値と日次分散推定値 $\hat{h}_t$から各日各 5 分インターバルの標準化誤差項 $\hat{\varepsilon}_{t|n} = r_{t|n}/\sqrt{\hat{h}_t/N}$を計算し、次に、得られた時系列データを用いてインターバル毎に GARCH(1,1)モデルを疑似最尤法により推定する 2 ステップ法を提案した。C-D は$\hat{h}_t$推定のいくつかの方法に言及しているが、実証例では日次実現分散を用いている。

もし季節分散が決定論的要素によってすべて説明されるのであれば式(2)のα_n, β_nはすべて 0 となるので、確率的季節分散の存在については次の仮説の検定によって行う：

$$H_0: \alpha_1 = \cdots = \alpha_N = \beta_1 = \cdots = \beta_N = 0 \tag{4}$$

検定は、インターバル（$n = 1, \ldots, K$）毎の OLS 回帰

$$\hat{\varepsilon}_{t|n}^2 = a_{0|n} + a_{1|n}\hat{\varepsilon}_{t-1|n}^2 + \cdots + a_{l_n|n}\hat{\varepsilon}_{t-l_n|n}^2 + a_{t|n},\ \ t = 1, \ldots, T, \tag{5}$$

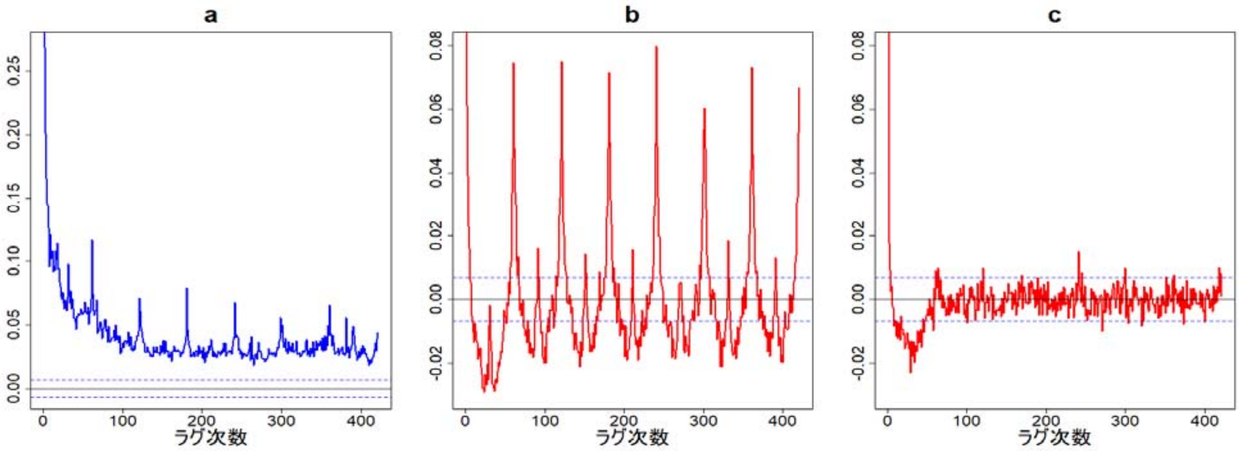
から得られる決定係数R_n^2を用いて、ラグランジュ乗数検定統計量 $LM = T\sum_{n=1}^{N} R_n^2$を計算し、帰無仮説の下で$LM$が漸近的に自由度$\sum_{n=1}^{N} l_n$のカイ２乗分布となることを利用して行う。また、C-D は、分散季節調整項のうち決定論的要素と確率変動要素の相対的重要性を$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\omega_n$と$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(\alpha_n + \beta_n)$の大きさの比較により行うことを提案している。

3. 日経平均ボラティリティ日内季節性の実証分析への応用

次に ARCSV モデルの応用例として、日経平均株価データへの適用を考える。データは冒頭で紹介した図の作成と同様に、標本期間は 2011 年 11 月 21 日から 2017 年 5 月 31 日とし、1 日の取引時間 5 時間を 60 個の 5 分インターバル（N=60）に分割（昼休み 1 時間の変化率は除外）した。予備分析として、まず、対数変化率 $r_{t|n}$、標準化誤差 $\hat{\varepsilon}_{t|n}$（$\hat{h}_t$は日次実現分散とした。定義は脚注 2 の通り）、それぞれの 2 乗の時系列データ（N=60、日数 T=1355 で標本サイズ NT=81300）の標本自己相関を計算し図 2.a と 2.b に示した（ラグ次数 420 まで。2 つの点線は 95%信頼区間を表す）。図 2.a からは生の変化率 2 乗の自己相関はラグ次数の関数としてゆっくり減衰することに加えて、60 の倍数の次数のラグ（1 日、2 日、…、7 日間に相当）における自己相関のスパイクが見て取れる。さらに、図 2.b からは、5 分間短期変化率の自己相関のかなりの部分が日次実現ボラティリティの自己相関により説明されるが、なお 60 の倍数のラグ次数において有意なスパイクが残っていることが分かる。ただし、これは標本自己相関の定義に含まれる平均が時刻による違いを考慮しない長期標本平均であることによる可能性がある。そこで、標準化誤差 2 乗系列からそれぞれのインターバルの標本平均を引いたものを繋げた系列の標本自己相関を計算し図 2.c に示した。まだ 60 の倍数ラグ次数の自己相関の多くはかろうじて有意に 0 と異なる水準で、絶対水準も大きくはない。結論としては、ARCSV モデルを利用するまでもなく、日経平均のボラティリティ変動の大部分は、日次水準の変動と変動決定論的な季節項（インターバル毎の変化率 2 乗

の平均で推定できる）で捉えることができることが分かる。図 2.c ではラグ次数 60（＝1 日）未満において負に有意な自己相関（絶対的な値は小さい）が見られるが、これは季節項ではなく超短期のボラティリティの持続性（$v_{t|n}$の自己相関）による可能性が高い。

図2 日経平均5分変化率2乗自己相関



予備分析で結論が見えてしまった感があるが、次のステップとして式 (5)のラグランジュ乗数検定統計量を計算したところ約 300.11（p 値は約 0.005）となり、季節調整項の GARCH モデルの係数α_n, β_nはすべて 0 という仮説は棄却された（各インターバルの最大ラグ次数 $l_n = 4$ とした）。これを受け、ARCSV モデルを推計（つまり、5 分インターバル毎に標準化誤差の日次時系列データにより GARCH(1,1)を推計）した。推定には R パッケージ rugarch の ugarchfit を用いたが、収束基準等デフォルト設定で 60 個の GARCH(1,1)モデル疑似尤度関数の最大化はすべて収束し、ω_n, α_n, β_nそれぞれの推定値の平均（n = 1,…,N, N=60）は 0.0341 (10), 0.0061 (6), 0.9620 (58)となった（括弧内の数字は 60 式中、頑健標準誤差ベース 5%水準で有意なものの個数）。個別インターバルの推定結果の詳細は省略するが、分散季節調整項 $s_{t|n}$の持続性を捉えるβ_n推定値が 1 に近く、$s_{t|n}$の確率的変動を捉えるα_nが 0 に近いインターバルが多かった。これは、ボラティリティの季節性の確率変動要素はあまり大きくないことを示唆する予備分析の結果と整合的である[5]。60 の日内 5 分間インターバルのうち、ARCSV モデルにより 5 分間ボラティリティの予測精度が高まるものもあるかもしれないが、その検証は今後の課題とする。

4. 終わりに

本稿では金融資産価格のボラティリティの日内季節性を捉えるモデルとして、日内季節性の確率変動を考慮する ARCSV モデルを紹介し、日経平均株価データに適用した結果を報

[5] もし、$\alpha_n = 0$が正しければ、季節調整項の確率変動は無いことになるが、この場合は GARCH(1,1)モデルの統計分析には注意が必要である（Andrews (2001)参照）。

告した。予備分析と ARCSV モデル・ベースの分析から、日経平均ボラティリティの日内季節性は決定論的要因（日内短期インターバル毎の変化率 2 乗の平均で推定可能）が大きく、確率変動要因はそれをモデル化し予測することにより短期ボラティリティ予測精度向上に役立てることができるほどには重要ではない可能性が高いことが分かった。

参考文献

Andersen, T., Bollersleve, T., Diebold, F., and Labys, P. (2003). Modeling and forecasting realized volatility. *Econometrica* 71, 579-25.

Andrews, D. (2001). Testing when a parameter is on the boundary of the maintained hypothesis. *Econometrica* 69, 683-734.

Cho, J.H., and Daigler, R. (2014). A filtering process to remove the stochastic component from intraday seasonal volatility. *J. Futures Markets* 35, 479-495.

Cho, J.H., and Daigler, R. (2012). An unbiased autoregressive seasonal variance filtering process. *Quantitative Finance* 12, 231-247.