

周波数分解された分散リスク・プレミアムの予測力

大阪大学 大学院経済学研究科
数理・データ科学教育研究センター 大屋幸輔

1 はじめに

Bollerslev, Tauchen and Zhou (2009) が米国の株式市場収益率に対して、分散リスク・プレミアムが予測力を持っているという実証研究を示して以来、数多くの関連する研究が行われてきた。分散リスク・プレミアムとは、資産価格の将来のリターンリスク中立確率測度のもとでの分散であるインプライド分散と現実の確率測度のもとでの分散である実現分散 (Realized Variance) との差で定義される量である。インプライド分散の方はいわゆるモデルフリーとよばれるモデルの依存度をできるだけ排除した算出方法で計算されるものであり、米国 Cboe Global Markets が開発した Cboe Volatility Index(VIX) はその代表である。我が国に関しては民間の金融機関の専門部署が独自に算出しているものを除けば、学術研究目的で公表されている大阪大学の Volatility Index Japan(VXJ) や日本経済新聞社が公開している日経平均ボラティリティー・インデックス (日経平均 VI) が代表的指標である。

ボラティリティー・インデックスは市場収益率と負の相関をもつことから、恐怖指数 (fear gauge) ともよばれているが、その関係性はあくまで同時点のもので、先にこのインデックスが上昇し、その後収益率が下落する、といった異時点間の相関が理論的に示されているわけではない。しかし、VIX ショックとよばれる VIX の上昇が売り注文を増幅させて大きく株式相場を下落させると言われているショックのように、実際にはボラティリティー・インデックスの動きが引き金となり市場が動き出す事象も広く認識されている。

他方、ボラティリティー・インデックス自体ではなく、実現分散との差で定義される分散リスク・プレミアムは何を表しているのであろうか。これについては Bakshi and Madan (2006) が、二つの分散の差は現実の確率測度のもとでの収益率の歪度と尖度、そして市場参加者のリスク回避度で表すことができることを示している。将来の市場の状況を、不確実な収益率の動きを表す確率法則に関する情報と市場参加者のリスクに対するスタンスを織り込んだこの差によって予測することは直感的には可能なように思える。この予測可能性に関しては実証分析によって示されるものである。米国においては予測力を持つとされた分散リスク・プレミアムであるが、我が国を含む他の国々の市場に関しては必ずしも統計的に有意な予測力は検出されていない^{*1}。Bollerslev, Tauchen and Zhou (2009) の結果の頑健性に関しては、Bekaert and Hoerova (2014) が分散リスク・プレミアムを構成する実現分散に対して様々なモデルをあてはめ、モデル選択を行なった上で再検証しているが、市場収益率に対する予測力に関しては Bollerslev, Tauchen and Zhou (2009) と同様の結論を得ている。渡部 (2016) も実現分散に関して HAR モデルを適用した上で、分散リスク・プレミアムの予測力を検証しており、日経平均株価の超過収益率に対する予測力を分散リスク・プレミアムは持っていないという結論に達している。我が国での分散リスク・プレミアムは日経平均株価の超過収益率に対する予測力を持っていないというこの結論に関して、本稿では周波数分解という視点のもと、分散リスク・プレミアムが特定の周期のもとで、超過収益率に対して予測力を持つのかどうかを明らかにする。

^{*1} 大屋 (2011) が景気指標に対して分散リスク・プレミアムは予測力をもっていること、また Ubukata and Watanabe (2014) ではクレジット・スプレッド、景気指標に関しては予測力をもっているが、日経平均株価の収益率に関しては予測力がないことを明らかにしている。

2 分散リスク・プレミアムの予測力

複数の時系列の間の関係性を検証するには、モデルを使わずに時点をずらした系列の相関である時差相関を調べる方法から、ベクトル自己回帰 (vector autoregressive: VAR) モデルをもちいた Garanger の因果性の検証まで多くの方法がある。分散リスク・プレミアムの予測力に関しては、Bollerslev, Tauchen and Zhou (2009) にならい以下の回帰モデルを使って検証する。

$$ER_{t+1:t+h} = a(h) + b(h) VRP_t + u_{t,t+h} \quad (1)$$

添字の各期は月次とする。この回帰モデルの被説明変数 $ER_{t+1:t+h}$ は日経平均株価の h 期先までの超過収益率として $ER_{t+1:t+h} = h^{-1} \sum_{j=t+1}^{t+h} ER_j$ によって定義されるものである。ただし ER_j は j 期の超過収益率で、 j 期の日経平均株価の対数収益率から同時期の譲渡性預金平均金利を引いて求めたものである。説明変数 VRP_t は大阪大学数理・データ科学教育研究センターが公開しているボラティリティ指数 VXJ (Volatility Index Japan) を 2 乗したものの月中平均から、HAR モデルによって計算された $t+1$ 期の実現分散の予測値 $E_t[RV_{t+1}] = \widehat{RV}_{t+1}$ を引いたものである*2。

図1は超過収益率、HAR モデルによる実現分散の予測値、インプライド分散、そして分散リスク・プレミアムを示している。実現分散、インプライド分散ともに世界的金融危機の頃に対応する2008年10月に大き

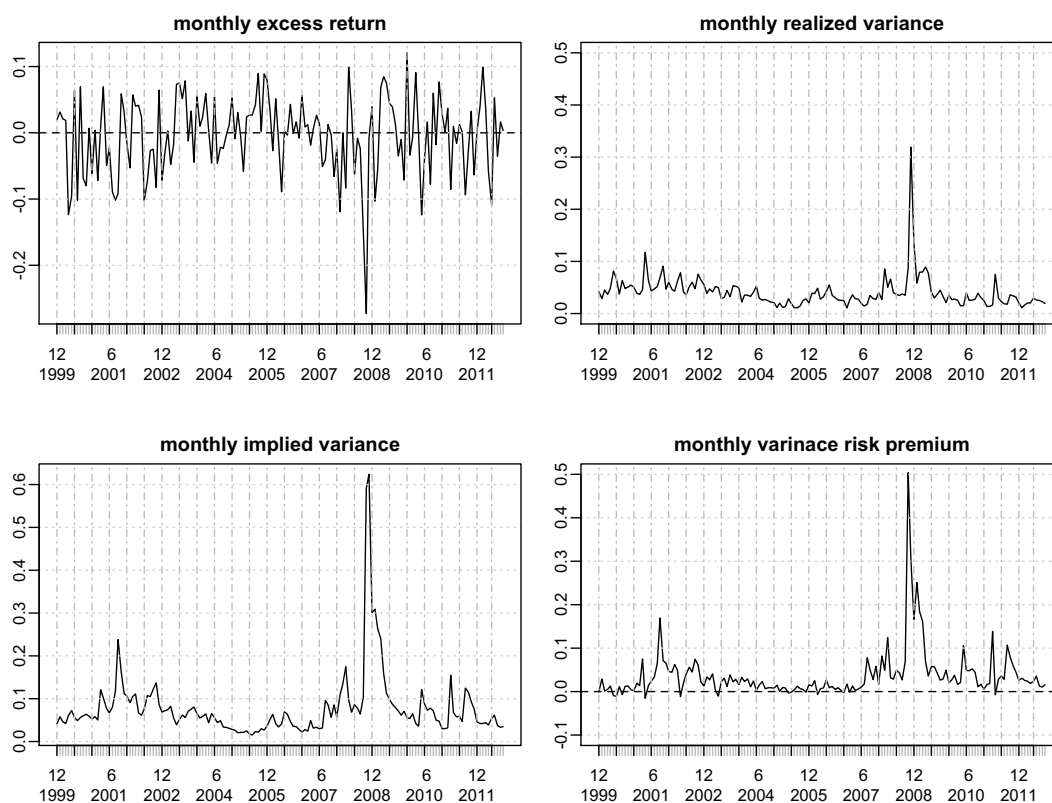


図1: 収益率 (上段左), 実現分散 (上段右), インプライド分散 (下段左), 分散リスク・プレミアム (下段右)

*2 HAR モデルの詳細については渡部 (2016) を参照。本稿では渡部 (2016) でのジャンプがないモデルを用いている。

表1 (1) の推定結果

h	1	3	6	9	12	15	18	24
$\hat{a}(h)$	-0.006	-0.005	-0.006	-0.005	-0.004	-0.003	-0.002	-0.002
p-value	0.206	0.553	0.717	0.836	0.905	0.942	0.956	0.974
$\hat{b}(h)$	0.037	0.010	0.060	0.048	0.028	0.025	0.027	0.033
p-value	0.567	0.970	0.908	0.947	0.975	0.982	0.983	0.983
$R^2(h)(\%)$	0.132	0.025	1.490	1.369	0.614	0.589	0.759	1.523

な値をとっているが、分散リスク・プレミアムも同時期に大きな値を取っており、実現分散のモデルでは捉えきれない大きな変動をインプライド分散が捉えていたことがわかる。

(1) で h を 1, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 24 と変えて推定を行なった結果が表1である。検定統計量は明記していないが、頑健 t 統計量をもとめ、それから計算される p 値を p-value として掲載している。決定係数は、 $h = 6, 9$ でその値を大きくするがその後は低下していることがわかる。しかしながら、定数項の推定値 $\hat{a}(h)$ 、係数推定値 $\hat{b}(h)$ はいずれの h に関しても有意なものではなかった。 h の値による決定係数の増減の傾向は Bollerslev, Tauchen and Zhou (2009) でも見られるが、彼らの実証結果では $\hat{b}(h)$ については、 $h = 3, 6$ については有意であることが示されている。日経平均株価の収益率を分析対象としている研究に関しては、データの加工、実現分散の予測モデルに使用したモデルの違いはあるが、渡部 (2016) においても本稿と同様に係数推定値が有意とならない結果となっている。

以上は、観測される時系列データをもちいて回帰分析を行なった結果に関するものであるが、次節ではデータをいくつかの周波数帯に分解し、それぞれの周波数帯において回帰分析をおこなうバンド・スペクトラム回帰法を適用した結果を見ていく。

3 周波数分解された分散リスク・プレミアムの予測力の検証

時系列データは時間とともに変動し様々な値をとるが、その変動はいくつかの周期をもった波に分解することができる。図2 (最上段) には超過収益率 ER と分散リスク・プレミアム VRP の時系列が描かれている。図2の2段目から4段目には、原系列を3つの周波数帯 (上から低周波帯、中周波帯、高周波帯) に分解した系列が示してあり、低周波帯から高周波帯になるにつれて、系列の変動の周期が短くなっている様子がわかる。

通常回帰分析では、最上段の左の系列 ER を被説明変数、VRP を説明変数とする回帰モデルを推定するのであるが、バンド・スペクトラム回帰は、分解された周波数帯ごとに回帰モデルを推定する分析手法である。推定に用いる時系列データの頻度は月次であることから、周波数領域 $[0, \pi]$ では、周波数 π が2ヶ月の周期に対応し、 $\pi/2$ は4ヶ月、 $\pi/3$ は6ヶ月の周期に対応する。例えば低周波帯 $[0, \pi/3]$ (6ヶ月以上の長い周期) においては、図2の2段目の系列 ER を被説明変数、同2段目の VRP を説明変数とする回帰モデルを推定するのである。このような周波数領域での回帰分析は Hannan (1963) によって提唱され、その後、Engle (1974) がバンド・スペクトラム回帰として、その有用性を示したものである*3。

推定対象となる式は (1) と基本的に同じだが、変数や係数に周波数帯を表す上付き添字をつけている。 $k = 1$

*3 時系列データの周波数帯への分解やバンド・スペクトル回帰の詳細については山本 (1988) を参照のこと。

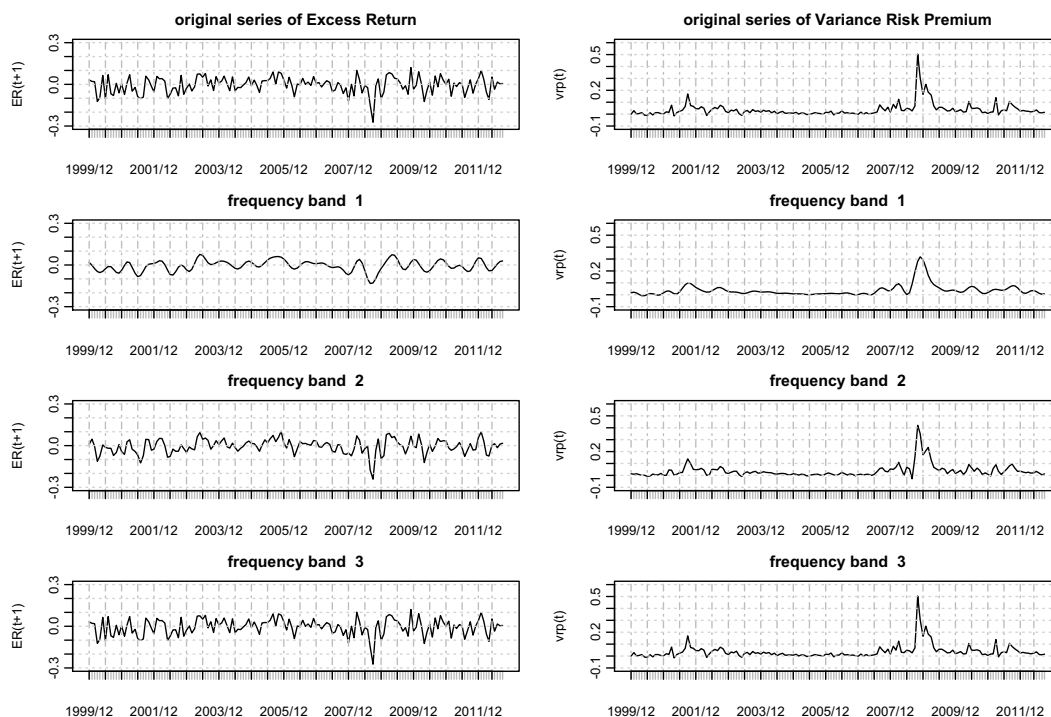


図 2: 超過収益率と分散リスク・プレミアムの原系列と周波数分解された系列

は低周波数帯 (図 2 の 2 段目), $k = 2$ は中周波数帯 (同 3 段目), $k = 3$ は高周波数帯 (同 4 段目) である。

$$ER_{t+1:t+h}^{(k)} = a^{(k)}(h) + b^{(k)}(h) VRP_t^{(k)} + u_{t,t+h}^{(k)} \quad (2)$$

$h = 1, 3, 6$ のときの $b^{(k)}(h)$ と決定係数をまとめたものが表 2 である。低周波帯における $h = 1$ のときの係数推定値が有意性を示している点が、周波数分解しなかった通常の分析結果との大きな違いである*4。低周波帯は $[0, \pi/3]$ に対応するので、6 ヶ月以上の長い周期の変動に限れば、分散リスク・プレミアムは将来の超過収益率の動きを捉えていることになる。有意となったのが $h = 1$ での係数推定値で、その符号が負であることから、VRP の長期的な変動が上昇傾向 (あるいは下降傾向) を示す場合、1 ヶ月後の ER の長期的な変動が下降傾向 (あるいは上昇傾向) を示す可能性が高いということが言える。ただし、1 ヶ月後の ER の値自身の変化の方向が予測できるということではないことには注意が必要である。

表 2 (2) の推定結果

k	$h = 1$			$h = 3$			$h = 6$		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$b_1^{(k)}(h)$	-0.188	-0.022	0.037	-0.047	0.002	0.010	0.040	0.060	0.060
p-value	0.048	0.904	0.891	0.844	0.994	0.970	0.937	0.919	0.908
$R^2(h)(\%)$	5.932	0.057	0.132	0.450	0.001	0.025	0.505	1.364	1.490

*4 $h = 9, 12, 15, 18, 24$ では $h = 3, 6$ と同様にいずれの係数推定値も有意とはならなかった。

4 おわりに

従来の時間領域の回帰分析では、分散リスク・プレミアムは将来の超過収益率に対する予測力をもっていないことが示されるが、それぞれの変数の長期的な変動成分に限れば、予測力があることが示された。係数の符号に関しては、分散リスク・プレミアムという名の由来に忠実であれば、符号は正であるべきだが、ここでの結果は負となっている。しかし符号が負であるという結果は、VIXショックが生じる現在の市場を取り巻く環境を鑑みれば、むしろ整合的であろう。

周波数領域での分析に関しては、ここで取り扱ったバンド・スペクトラム回帰以外にもVARモデルを使った因果性の検証を周波数領域で行う方法も適用できるが紙面の都合上、ここでは割愛する*⁵。

参考文献

- Bakshi, G. and Madan, D. (2006), “A theory of volatility spread,” *Management Science*, 52(12), 1945–1956.
- Bekaert, G. and Hoerova, M. (2014), “The VIX, the variance premium and stock market volatility,” *Journal of Econometrics*, 183(2), 181–192.
- Bollerslev, T., Tauchen, G., and Zhou, H. (2009), “Expected stock returns and variance risk premia,” *Review of Financial Studies*, 22(11), 4463–4492.
- Engle, R. F. (1974), “Band spectrum regression,” *International Economic Review*, 15(1), 1–11.
- Hannan, E. J. (1963), “Regression for time series,” in Rosenblatt, M. (ed.), *Time Series Analysis*, New York, John Wiley.
- Hosoya, Y., Oya, K., Takimoto, T., and Kinoshita, R. (2017), *Characterizing Interdependencies of Multiple Time Series: Theory and Applications*, Springer.
- Ubukata, M., and Watanabe, T. (2014), “Market variance risk premiums in Japan for asset predictability,” *Empirical Economics*, 47(1), 169–198.
- 大屋幸輔 (2011), 「ボラティリティの景気予測力 – バリエンス・リスクプレミアムの検証から –」, 『世界同時不況と景気循環分析』第7章, 東京大学出版会, 141–157.
- 山本拓 (1988), 『経済の時系列分析』, 創文社.
- 渡部敏明 (2016), 「日経 225 分散リスク・プレミアムの予測力」, 『先物・オプションレポート』, 大阪取引所, Vol.28, No. 11.

本資料に関する著作権は、株式会社大阪取引所にあります。
本資料の一部又は全部を無断で転用、複製することはできません。
本資料の内容は、株式会社大阪取引所の意見・見解を示すものではありません。
本資料は、デリバティブ商品の取引の勧誘を目的としたものではありません。

*⁵ Hosoya, et al. (2017) を参照。