GARCH オプション価格の閉じた解の考察

日本大学経済学部教授　三井秀俊

1. はじめに

本稿は, Heston and Nandi (2000) の提案した GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) モデルによるオプション評価の閉じた解に関してサーベイを行なったものである．ボラティリティ変動モデルを用いてオプション価格付けの分析を行う場合には大きく 2 つに分けて研究が行なわれている．1 つは, 確率的分散変動 (Stochastic Volatility; SV) モデルを用いる方法であり, Heston (1993) は SV モデルによるオプション価格の評価モデルに対して閉じた解を与えた[1)]．もう一つの方法は, ファイナンスの実証研究で頻繁に利用される ARCH 型モデルを用いることである．Heston and Nandi (2000) は, Engle and Ng (1993) の Nonlinear Asymmetric GARCH (NGARCH) モデルと VGARCH モデルに類似した離散時間 GARCH モデルに対して閉じた解を与えた[2)]．このモデルは, 離散時間モデルであるため連続時間モデルよりも資産価格データを直接利用できる等の利点がある.

2. モデル

Heston and Nandi (2000) は, 原資産価格 S_t とボラティリティ σ_t^2 の変動が以下のような過程に従うと仮定した.

$$\log(S_t) = \log(S_{t-\Delta}) + r + \lambda\sigma_t^2 + \sigma_t z_t, \tag{1}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j\Delta}^2 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \left(z_{t-i\Delta} - \gamma_i \sigma_{t-i\Delta}\right)^2. \tag{2}$$

ここで, Δ は時間間隔 (time interval), r は時間間隔 Δ に対する連続時間無リスク資産利子率, z_t は標準正規分布に従う誤差項を表す．また, λ はリスク・プレミアム, γ はボラティリティの非対称性を捉えるパラメータを表す．Nelson and Foster (1994) に従うと (1), (2) 式において $p = q = 1$, すなわち GARCH(1,1) モデルのとき, ボラティリティ σ_t^2 の過程は, 以下の平方根過程に収束する[3)]

$$d\sigma^2 = \kappa[\theta - \sigma^2]dt + \delta\sigma dz. \tag{3}$$

[1)]Heston (1993) の SV モデルによるオプション価格の閉じた解に関する解説として, 三井 (2012) を参照.

[2)]また, 離散時間 GARCH モデルの近似解としては, エッジワース級数展開 (Edgeworth series expansion) を利用した Duan *et al.* (1999) の研究がある.

[3)]証明は Heston and Nandi (2000) の Appendix B を参照.

ここで, θ は長期的な平均回帰, κ は長期的な平均回帰への調整速度, dz はウィナー過程を表す．そのため, (1), (2) 式によるオプション評価モデルは, Heston (1993) の連続時間 SV モデルを含んでいることになる．また, GARCH(1,1) モデルのとき, ボラティリティ σ_t^2 と原資産収益率は以下の相関をもつ．

$$Cov_{t-\Delta}[\sigma_{t+\Delta}^2,\ log(S_t)] = -2\alpha_1\gamma_1\sigma_t^2. \tag{4}$$

$\alpha_1,\ \gamma_1$ が正の値であれば, 原資産収益率とボラティリティとの間には負の相関がある結果となる．

リスク中立過程にするため, (1), (2) 式を以下のように書き換える[4)]．

$$\log(S_t) = \log(S_{t-\Delta}) + r - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \sigma_t\xi_t, \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^{p}\beta_j\sigma_{t-j\Delta}^2 + \sum_{i=2}^{q}\alpha_i\left(z_{t-i\Delta} - \gamma_i\sigma_{t-i\Delta}\right)^2 \\ + \alpha_1\left(\xi_{t-\Delta} - \gamma_1^*\sigma_{t-\Delta}\right)^2.\end{aligned} \tag{6}$$

ここで,

$$\xi_t = z_t + \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\sigma_t,$$

$$\gamma_1^* = \gamma_1 + \lambda + \frac{1}{2}.$$

また, ξ_t はリスク中立性の下で標準正規分布に従う誤差項である．

3. GARCH オプション価格の閉じた解

(1), (2) 式の GARCH 過程に関して, $f(\phi)$ を以下のような原資産価格の条件付母関数 (conditional generating function) と表記する．

$$f(\phi) = E_t[(S_T)^{\phi}]. \tag{7}$$

これは, 満期日の原資産価格 S_T の対数の積率母関数 (moment generating function) でもある．関数 $f(\phi)$ は, モデルのパラメータと状態変数に依存する．また, (5), (6) 式のリスク中立過程に関しての母関数は, $f^*(\phi)$ と表記することにする．ここで, 積率母関数を対数線形の形式にすると,

$$\begin{aligned}f(\phi) =&(S_T)^{\phi}\exp\Bigg(A(t;\ T,\ \phi) + \sum_{j=1}^{p}B_j(t;\ T,\ \phi)\sigma_{(t+2\Delta-j\Delta)}^2 \\ &+ \sum_{i=1}^{q-1}C_i(t;\ T,\ \phi)z_{(t+\Delta-i\Delta)} - \gamma_i\sigma_{(t+\Delta-i\Delta)}^2\Bigg)\end{aligned} \tag{8}$$

[4)] Duan (1995) のオプション評価モデルと同様の考え方である．Duan (1995) の解説として, 三井 (2019) を参照.

となる. ここで, $P = q = 1$ のとき,

$$\begin{aligned} A(t;\ T,\ \phi) =& A(t+\Delta;\ T,\ \phi) + \phi r + B_1(t+\Delta;\ T,\ \phi)\omega \\ & - \frac{1}{2}\ln(1 - 2\alpha_1 B_1(t+\Delta;\ T,\ \phi)) \end{aligned} \tag{9}$$

$$B_1(t;\ T,\ \phi) = \phi(\lambda+\gamma_1) - \frac{1}{2}\gamma_1^2 + \beta_1 B_1(t+\Delta;\ T,\ \phi) + \frac{1/2(\phi-\gamma_1)2}{1-2\alpha_1 B_1(t+\Delta;\ T,\ \phi)} \tag{10}$$

となり, 係数は以下の期末条件 (terminal condition) から再帰的に求めることができる.

$$A(T;\ T,\ \phi) = 0, \tag{11}$$

$$B_1(T;\ T,\ \phi) = 0. \tag{12}$$

また, GARCH(p, q) の一般形の場合は, Heston and Nandi (2000) の Appendix A) を参照して頂きたい.

原資産価格の母関数は, 原資産価格の対数の積率母関数となるので, $f(i\phi)$ は原資産価格の対数の特性関数 (characteristic function) [5] となる. 特性関数を利用するため, (9), (10) 式の ϕ は $i\phi$ に置き換えなければならない. 特性関数を反転させることにより, 確率やリスク中立確率を得ることができる (フーリエの逆変換; fourier inversion). 対数原資産価格の特性関数が $f(i\phi)$ ならば,

$$\begin{aligned} E_t\left[Max(S_T - K,\ 0)\right] =& f(1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty Re\left[\frac{K^{-i\phi}f(i\phi+1)}{i\phi f(1)}\right]d\phi\right) \\ & - K\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty Re\left[\frac{K^{-i\phi}f(i\phi)}{i\phi}\right]d\phi\right) \end{aligned} \tag{13}$$

となる[6]. ここで, $Re[\cdot]$ は複素数の整数部分 (real part) を表す. オプションの価値は, リスク中立確率を用いて計算された満期日でのペイオフ $Max[S_t - K, 0]$ の期待値を割引いたものとなる. すなわち, 特性関数 $f(i\phi)$ を用いることである. このとき, 時点 t での権利行使価格 K のヨーロピアン・コール・オプションの価値 C_t は以下の式で与えられる.

$$\begin{aligned} C_t &= e^{-r(T-t)}\hat{E}\left[Max(S_T - K,\ 0)\right] \\ &= \frac{1}{2}S_t + \frac{e^{-r(T-t)}}{\pi}\int_0^\infty Re\left[\frac{K^{-i\phi}f^*(i\phi+1)}{i\phi}\right]d\phi \\ &\quad - Ke^{-r^*(T-t)}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty Re\left[\frac{K^{-i\phi}f^*(i\phi)}{i\phi}\right]d\phi\right). \end{aligned} \tag{14}$$

ここで, $\hat{E}$ はリスク中立的な下での期待値を表す. プット・オプション P_t は, プット・コール・パリティ (put-call parity) 式[7] を用いて導出すればよい.

[5] ユークリッド空間上の確率測度のフーリエ変換 (fourier transform) のこと. したがって, 対応する確率測度に関する情報は全て持っている. このことから, 確率変数の独立性の検証や確率の評価をすることができる.

[6] 詳しくは，Heston and Nandi (2000) の Appendix A を参照

[7] $P_t = C_t - S_t + e^{-(T-t)r}K$.

実証研究では GARCH (1,1) モデルを用い, パラメータの推定を行なう際には最尤法 (Maximum Likelihood method) を利用している. S&P500 オプションを用いた実証研究では, GARCH モデルは Black-Scholes モデルよりもパフォーマンスが優れており, 特に長期のオプションで顕著であるという結果を得ている.

4. まとめ

本稿では, Heston and Nandi (2000) の GARCH オプション価格の閉じた解について概観した. 今後の展望としては, 日経 225 オプションのデータを用いて実証分析を行なうことや, 高頻度データによる Realized Volatility モデルや Realized GARCH モデルへの応用を行なうこと等が挙げられる.

参考文献

[1] 三井秀俊 (2012), 「連続時間確率的分散変動オプション価格の閉じた解の考察」, 日本取引所グループ『先物・オプションレポート』, Vol.24, No.8, pp. 1–5.

[2] 三井秀俊 (2019), 「局所リスク中立性によるオプション評価の考察」, 日本取引所グループ『先物・オプションレポート』, Vol.31, No.4, pp. 1–6.

[3] Duan, J.-C. (1995), "The GARCH Option Pricing Model," *Mathematical Finance*, 5, pp. 13–32.

[4] Duan, J. -C., G. Gauthier and J. -G. Simonato (1999), "An Analytical Approximation for the GARCH Option Pricing Model," *Journal of Computational Finance*, 4, pp.75-116.

[5] Engle, R. F. and V. Ng (1993), "Measuring and Testing the Impact of News on Volatility," *Journal of Finance*, 43, pp. 1749-1778.

[6] Heston, S. L. (1993), "A Closed Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options," *Review of Financial Studies,* 6, pp. 327–343.

[7] Heston, S. L. and S. Nandi (2000), "A Closed-Form GARCH Option Valuation Model," *Review of Financial Studies,* 13, pp. 585–625.

[8] Nelson, D. B. and D. B. Foster (1994), "Asymptotic Filtering Theory for Univariate ARCH Models," *Econometrica*, 62, pp. 1–41.