ボラティリティ指数の理論

深澤 正彰

大阪大学大学院基礎工学研究科

1 はじめに

本稿では VIX を始めとするボラティリティ指数の背後にある理論を, 測度論や確率解析などの現代数学を用いずに解説したい. 大阪大学が 10 年以上に渡って算出, 公開してきた日経平均のボラティリティ指数 VXJ についても改めてその特徴を紹介するとともに, 来月号にかけて今後の改善・拡張のアイデアにも触れる.

2 無裁定関係

まず記号の導入を兼ねて, オプション市場価格が満たすべき基本的な関係式をまとめておく. ある原資産 (例えば日経平均), ある満期 (限月) に対して, 行使価格 $K_1 < K_2 < \cdots < K_n$ においてコールオプション及びプットオプションが市場で取引されているとする. それぞれの現在価格を $C(K_i)$ 及び $P(K_i)$ と表し, オプションと同一満期のゼロクーポン債価格（額面 1 当たり) を D, 原資産先物価格を F と表すとき, 市場が無裁定ならば以下の関係式が成立する:

1. $K_i < K_j$ ならば
$$-D \leq \frac{C(K_j) - C(K_i)}{K_j - K_i} \leq 0,$$
つまり関数 $K \mapsto C(K)$ は傾き $-D$ 以上 0 以下.
2. $K_i < K_j$ ならば
$$0 \leq \frac{P(K_j) - P(K_i)}{K_j - K_i} \leq D,$$
つまり関数 $K \mapsto P(K)$ は傾き 0 以上 D 以下.
3. $K_q = \lambda K_p + (1-\lambda)K_r$, $\lambda \in [0,1]$ ならば $C(K_q) \leq \lambda C(K_p) + (1-\lambda)C(K_r)$,
つまり関数 $K \mapsto C(K)$ は下に凸.
4. $K_q = \lambda K_p + (1-\lambda)K_r$, $\lambda \in [0,1]$ ならば $P(K_q) \leq \lambda P(K_p) + (1-\lambda)P(K_r)$,
つまり関数 $K \mapsto P(K)$ は下に凸.
5. $D(F - K_i)_+ \leq C(K_i) \leq DF$
6. $D(K_i - F)_+ \leq P(K_i) \leq DK_i$
7. $C(K_i) - P(K_i) = D(F - K_i)$ (プット・コールパリティ)

ただし $(x)_+$ は $\max\{0, x\}$ を表す. いずれの関係式に対しても, もしそれが満たされない場合には, 安い方を購入して高い方を売却, そのまま満期まで放置するのが裁定戦略となる. 例えば $K_i < K_j$ に対して $C(K_j) - C(K_i) < -D(K_j - K_i)$ なら, $C(K_j) + DK_j < C(K_i) + DK_i$ だから左辺を買って右辺を空売りすれば良い.

3 バリアンス・スワップ

バリアンス・スワップは OTC で取引されるデリバティブである. その満期を T, 現在時刻を 0, 時刻 $t \in [0, T]$ での原資産先物価格 (満期 T) を F_t と表すことにすれば, バリアンス・スワップとは

$$[\log F]_T := \sum_{j=0}^{N-1} \left| \log \frac{F_{t_{j+1}}}{F_{t_j}} \right|^2$$

と定義されるペイオフ $[\log F]_T$ の先渡取引である. ここで $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ は契約が定める参照時刻である. 例えば参照時刻が各営業日の最終取引時刻ならば, F_{t_j} は第 j 日目の終値ということになる. $[\log F]_T$ は満期 T までの日次の対数収益率の二乗和ということになるので, 日次対数収益の標本分散のようなものと考えることができる. 時刻 0 の時点ではこの値は未知であり, したがってバリアンス・スワップの価格は, 契約者間で合意した, $[\log F]_T$ の予測値と解釈できる. $[\log F]_T$ は原資産価格変動の激しさを測るものであるから, バリアンス・スワップ取引は市場変動リスクに関するヘッジ/投機手段となる.

バリアンス・スワップの著しい性質は, あるヨーロッパ型オプションとのモデルフリーな関係である. まず Taylor 展開によって,

$$\log \frac{F_{j+1}}{F_{t_j}} = \log\left(1 + \frac{F_{t_{j+1}} - F_{t_j}}{F_{t_j}}\right) \approx \frac{F_{t_{j+1}} - F_{t_j}}{F_{t_j}} - \frac{1}{2}\left|\frac{F_{t_{j+1}} - F_{t_j}}{F_{t_j}}\right|^2 .$$

さらにこの式を自身に代入すると,

$$\log \frac{F_{j+1}}{F_{t_j}} \approx \frac{F_{t_{j+1}} - F_{t_j}}{F_{t_j}} - \frac{1}{2}\left|\log \frac{F_{j+1}}{F_{t_j}}\right|^2 .$$

よって

$$[\log S]_T = \sum_{j=0}^{N-1} \left|\log \frac{F_{t_{j+1}}}{F_{t_j}}\right|^2 \approx -2\sum_{j=0}^{N-1} \log \frac{F_{t_{j+1}}}{F_{t_j}} + 2\sum_{j=0}^{N-1} \frac{F_{t_{j+1}} - F_{t_j}}{F_{t_j}}$$

を得る. 右辺第 1 項は

$$\begin{aligned} -2\sum_{j=0}^{N-1} \log \frac{F_{t_{j+1}}}{F_{t_j}} &= -2\sum_{j=0}^{N-1} (\log F_{t_{j+1}} - \log F_{t_j}) = -2(\log F_{t_1} - \log F_{t_0} + \log F_{t_2} - \log F_{t_1} + \dots) \\ &= -2(\log F_T - \log F_0), \end{aligned}$$

また右辺第 2 項

$$2\sum_{j=0}^{N-1} \frac{F_{t_{j+1}} - F_{t_j}}{F_{t_j}}$$

は各時刻 t_j で, $2/F_{t_j}$ 単位の原資産先物を購入し, それを t_{j+1} で売却していった挙句の損益の総和に等しい. したがって前者はヨーロッパ型オプション $-2\log F_T + 2\log F_0$ のペイオフに一致し, 後者は初期資産 0 からの運用によって実現できるキャッシュフローである.

ここまでの議論は, バリアンス・スワップ取引における $[\log F]_T$ の先渡契約が, ペイオフ $-2\log F_T + 2\log F_0$ の先渡契約と, (近似誤差を無視すれば) 等価であることを示すものである. その二つのペイオフの差は, (近似誤差を無視すれば) 初期資産 0 から実現できる損益であり, その現在価値は 0 である. したがって両者の先渡価格は近似的に等しい. 近似の精度は先物価格過程 F_t のモデルに依存するが, それでも近似の導出においてはモデルを仮定する必要がなかったことに注意する.

4 VIX

バリアンス・スワップの価格は $[\log F]_T$ の予測値, すなわち価格変動リスクの評価値であるから, これがモデルフリーに市場予測の形で算出できることには意義がある. 前節の議論より, この予測値は $-2\log F_T + 2\log F_0$ の先渡価格によってモデルフリーに近似される. この節ではさらに, この先渡価格をオプション市場価格からモデルフリーに近似計算する公式を与える. この近似の平方根がボラティリティ指数と呼ばれるものとなる.

ここで唐突であるが次の恒等式に注意する: 区間 $(0,\infty)$ 上の 2 回連続微分可能な任意の関数 f に対して

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \int_0^x (K-y)_+ f''(K)\mathrm{d}K + \int_x^\infty (y-K)_+ f''(K)\mathrm{d}K.$$

証明は単純な場合分けと単純な部分積分による. Taylor 展開公式に少し似ているが, これは近似式ではなく等式である. $f(x) = -2\log x$, $y = F_T$, $x = F_0$ として

$$-2\log F_T + 2\log F_0 = -\frac{2}{F_0}(F_T - F_0) + 2\int_0^{F_0} (K-F_T)_+ \frac{\mathrm{d}K}{K^2} + 2\int_{F_0}^\infty (F_T-K)_+ \frac{\mathrm{d}K}{K^2} \tag{1}$$

を得る. 右辺第 1 項は初期資産 0 から運用 (具体的には原資産先物 $2/F_0$ 単位の空売り) で得られる損益なので, 左辺の先渡価格に寄与しない. 右辺第 2 項, 第 3 項はそれぞれ積分を台形公式などで近似すれば, プットオプション, コールオプションのペイオフの重み付き和となるから, その先渡価格は (オプション市場があれば) オプション市場価格から決定する. 具体的に計算すると

$$\begin{aligned}
&2\int_0^{F_0} (K-F_T)_+ \frac{\mathrm{d}K}{K^2} + 2\int_{F_0}^\infty (F_T-K)_+ \frac{\mathrm{d}K}{K^2} \\
&= 2\int_0^{K_*} (K-F_T)_+ \frac{\mathrm{d}K}{K^2} + 2\int_{K_*}^\infty (F_T-K)_+ \frac{\mathrm{d}K}{K^2} + 2\int_{K_*}^{F_0} \frac{K-F_T}{K^2}\mathrm{d}K \\
&\approx 2\sum_{i=1}^n \frac{O_i}{K_i^2}\Delta K_i + 2\int_{K_*}^{F_0} \frac{K-F_0}{K^2}\mathrm{d}K + \left(\frac{1}{F_0} - \frac{1}{K_*}\right)(F_T - F_0).
\end{aligned} \tag{2}$$

ここで K_* は適当な行使価格, $\Delta K_i = (K_{i+1} - K_{i-1})/2$ で, O_i は $K_i < K_*$ なら $(K_i - F_T)_+$, $K_i > K_*$ なら $(F_T - K_i)_+$, $K_i = K_*$ なら $|K_i - S_T|/2$ である. 第 1 項はプットオプションとコールオプションのポートフォリオのペイオフなので, その先渡価格は

$$2\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{K_i^2}\Delta K_i$$

でなければならない. ここで Q_i は ペイオフ O_i の先渡価格であり, $K_i < K_*$ なら $P(K_i)/D$, $K_i > K_*$ なら $C(K_i)/D$, $K_i = K_*$ なら $(P(K_i) + C(K_i))/2D$ である. (2) の近似式第 3 項は初期費用 0 の運用収益なので先渡価格に寄与しない. (2) の近似式第 2 項は計算可能であるが, CBOE に倣って K_* として F_0 に近い行使価格を選び, 分母の K^2 を K_*^2 で近似してから積分すれば, 最終的に $-2\log F_T + 2\log F_0$ の先渡価格の近似として

$$\hat{V}(T) := 2\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{K_i^2}\Delta K_i - \left(\frac{F_0}{K_*} - 1\right)^2 \tag{3}$$

が導かれる.

CBOE が 2003 年に導入 (改定) したボラティリティ指数 VIX の計算においては, 直近 2 限月 T_1, T_2 それぞれについて $\hat{V}(T_1)$, $\hat{V}(T_2)$ を上記のように求め, 線形補間によって満期 $T = 30$ 日に対する推定値 $\bar{V}(T)$ を得る. 最終的に VIX は

$$\mathrm{VIX} = \sqrt{\frac{\bar{V}(T)}{T}} \times 100\%$$

と定義される. 正確には VIX は原資産を SPX とするボラティリティ指数であり, 日経平均に対する同様の計算によるボラティリティ指数は 2008 年より VXJ の名で大阪大学金融・保険教育研究センター (CSFI, 当時, 現 MMDS) が算出と公開 (週末更新) を始めた. これは大阪証券取引所 (当時, 現大阪取引所) 寄付研究部門の活動であった.

ボラティリティ指数は, そのモデルフリーな市場リスク評価値としての性質から「恐怖指数」とも呼ばれ注目される. 著者が CSFI 在職時には, 市場下落の度に日経新聞社から VXJ 数値についての問い合わせの電話が入り, その度最新の値を (週末更新とは別に) 計算して提供していた. 日経新聞社が「日経平均 VI」の算出・配信を開始したのは 2010 年である.

日経平均 VI の計算は VIX と (それゆえ当時の VXJ と) 実質的に同じである. 2010 年当時から大阪大学では以下で述べる VIX 計算公式の欠点を克服した新しい計算法を開発し, CSFI-VXJ の名で VXJ と併せて配信していた. 現在は CSFI-VXJ を VXJ と改称して配信中であり, 旧 VXJ (VIX 準拠のもの) は廃止している.

5 インプライド・ボラティリティ

現行 VXJ の計算公式を説明するために, まずインプライド・ボラティリティについて触れる. 現在時刻 0, 満期を $T > 0$ としたとき, 行使価格 K に対するプットオプションの Black-Scholes 価格公式は

$$P_{\mathrm{BS}}(K, \sigma) = D(K\Phi(-d_2) - F\Phi(-d_1)),\ \ d_1 = \frac{\log(F/K) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}},\ \ d_2 = d_2 - \sigma\sqrt{T}$$

で与えられる. ここで σ はボラティリティと呼ばれるパラメータであり, Φ は標準正規分布関数である. 標準正規密度関数を ϕ とすれば, 簡単な計算で

$$\frac{\partial}{\partial\sigma} P_{\mathrm{BS}}(K, \sigma) = DK\phi(-d_2)\sqrt{T} > 0,\ \ \lim_{\sigma\to\infty} P_{\mathrm{BS}}(K, \sigma) = DK,\ \ \lim_{\sigma\to 0} P_{\mathrm{BS}}(K, \sigma) = D(K - F)_+$$

がわかる. よって第 2 節の無裁定関係式 6 より, 各行使価格 K_i に対して

$$P_{\mathrm{BS}}(K_i, \sigma(K_i)) = P(K_i)$$

となる値 $\sigma(K_i) \geq 0$ が一意的に定まる. これをインプライド・ボラティリティと呼ぶ. プットオプションの代わりにコールオプションを用いて同様の計算を行っても, Black-Scholes 価格と市場価格の両方がプット・コールパリティ (第 2 節の無裁定関係式 7) を満たすので, 最終的には各行使価格に対して全く同じ値が定まる.

Black-Scholes 価格公式という, モデルに紐づいた関数を用いてはいるが, $\sigma(K)$ の計算には何らのモデルも仮定していないことを強調しておく. これはオプション市場価格の単なる非線形変換である. もし市場価格が Black-Scholes モデルと整合的なら $\sigma(K_i)$ は K_i に依存しない定数となるはずである. 現在の金融実務はむしろ市場価格が Black-Scholes モデルと整合的でないことを前提として, 市場価格をこのインプライド・ボラティリティに換算することで, 市場価格の Black-Scholes モデルからの乖離度を測る. QQ プロットと同様の発想である.

6 モデルフリーの意味とは?

VIX の元になっている公式 (3) はペイオフ $-2\log F_T + 2\log F_0$ の先渡価格の近似であった. その近似は行使価格 K_i が (1) 式右辺の積分区間 $(0,\infty)$ 上に広く細かく分布しているほど精度が良い. 区分求積の極限を考えれば, $-2\log F_T + 2\log F_0$ の先渡価格は

$$V(T) := \frac{2}{D}\int_0^{F_0} P(K)\frac{\mathrm{d}K}{K^2} + \frac{2}{D}\int_{F_0}^{\infty} C(K)\frac{\mathrm{d}K}{K^2} \tag{4}$$

に等しいことがわかる. 現実には $K = K_i$, $i = 1,2,\ldots,n$ に対してのみしか $P(K)$, $C(K)$ の市場価格がないので, この公式は $P(K_i)$, $C(K_i)$ たちを補間・補外するモデル価格 $P(K)$, $C(K)$ を用いて, $-2\log F_T + 2\log F_0$ の先渡価格を計算するものである. つまりこの先渡価格はモデルに依存し, 近似 (3) の精度はモデルに依存するのである. 言い換えると (3) のような近似の方法を一つ選ぶことは, 結果的にモデルを一つ選ぶことに相当するのである.

$P(K_i)$ の無裁定な補間・補外として, 第 1 節の関係式より, $0 = \lim_{K\to 0} P'(K)$ かつ $\lim_{K\to\infty} P'(K) = D$ となるような凸関数 P が選べる. ここで P' は P の右微分である. すると $K \mapsto P'(K)/D$ は分布関数となるので, 区間 $[0,\infty)$ 上の分布 Q が一つ定まる. Stieltjes 積分に関する部分積分より

$$P(K) = \int_0^{\infty} (K - F)_+ \mathrm{d}P'(F)$$

となるから, Q を F_T の分布とみなせば $P(K) = DE_Q[(K - F_T)_+]$ と書ける (E_Q は Q に関する期待値). つまり Q こそリスク中立確率と呼ばれるものであり, この補間・補外によって選ばれたモデルである.

このような観点から見た, VIX 計算公式 (3) の問題点は, まず補外のやり方が C と P の凸性に矛盾し, 無裁定になっていないことである. ΔK_1 と ΔK_n の設定を VIX 方式から変更することで, 無裁定な補間 (線形補間) に修正可能であるが, それでも対応するリスク中立確率 Q は以下のような不自然さを持ってしまう:

a) [離散性] $i = 0,1,2,\ldots,n$ に対して $Q(K_i < F_T < K_{i+1}) = 0$.
b) [有界性] $Q(K_0 \le F_T \le K_{n+1}) = 1$.

ここで $K_0 = K_1 - 2\Delta K_1$, $K_{n+1} = K_n + 2\Delta K_n$ である. 前者の不自然さは K_i の刻みが粗い市場において顕著であり, 後者は特に原資産 (先物) 価格の下落時に顕著となる. というのは F_0 が小さくなっても K_i は市場のルールで事前に固定されているため, $F_0 - F_T$ の最大値が不自然なほど小さく見積もられてしまうからである. 原資産価格の下落時こそ「恐怖指数」として, ボラティリティ指数が注目されるにも関わらずである.

VXJ は自然な補間・補外を実現するために次のような驚くべき公式を利用する:

$$V(T) = T\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(g(z))^2 \phi(z)\mathrm{d}z.$$

ここで $K \mapsto \sigma(K)$ はインプライド・ボラティリティ, $g(z)$ は $K \mapsto -d_2(K,\sigma(K))$ の逆関数, $\phi(z)$ は標準正規密度関数である. これは $V(T)$ の定義式 (4) から関数 g で変数変換して得られる, モデルフリーな公式である.

(来月号につづく)