

インプライド・ボラティリティの数理

深澤 正彰

大阪大学大学院基礎工学研究科

1 はじめに

ボラティリティ指数の理論を解説した前月号に続き、インプライド・ボラティリティ (以下, IV) に関連する数理ファイナンス研究のいくつかの話題を, できるだけ現代数学を使わない形に再定式化して紹介する. IV の定義については前月号を参照されたい. 前月号の流れを引き継いで VXJ (大阪大学 MMDS が配信しているボラティリティ指数) の計算公式に関連した, ミステリアスな関係式のいくつかに触れる.

2 行使価格のスケール変換

前月号で議論した通り, 通常モデルフリーなボラティリティ指数と呼ばれるものは, バリアンス・スワップと呼ばれる先渡契約の無裁定価格を元にしたものであり, その無裁定価格は次の二つの表現を持つ:

$$\frac{2}{D} \int_0^F P(K) \frac{dK}{K^2} + \frac{2}{D} \int_F^\infty C(K) \frac{dK}{K^2} = T \int_{-\infty}^\infty \sigma(g_2(z))^2 \phi(z) dz. \quad (1)$$

ここで $F = F_0$ は原資産先物価格 (満期 T), D はゼロ・クーポン債価格 (額面 1, 満期 T), $P(K)$ と $C(K)$ はそれぞれ行使価格 K のプットとコールのオプション価格 (満期 T), 関数 $K \mapsto \sigma(K)$ は IV, 関数 $z \mapsto g_2(z)$ は

$$K \mapsto f_2(K) := -d_2(K, \sigma(K)) = \frac{\log(K/F) + \sigma(K)^2 T/2}{\sigma(K) \sqrt{T}}$$

の逆関数, $\phi(z)$ は標準正規密度関数である. 逆関数 g_2 の存在, つまり関数 f_2 の単調性は [5] で証明されている. VIX [1], 旧 VXJ 及び日経平均 VI の計算は (1) 式左辺の近似式に基づいており, 現行 VXJ (旧 CSFI-VXJ) [7] の計算は (1) 式右辺の近似式に基づいている. VIX 等ではオプション価格の零補外を行うのでボラティリティを過小評価する. VXJ では IV を定数補外して計算しているため, 日経平均 VI より少し高い値が出ることが多い.

(1) 式の導出について述べておく. (1) 式左辺を部分積分すると (以下, 部分積分における境界値の処理には補外に対する適当な仮定が必要だが, ここでは紙面の制約上議論を割愛する)

$$\frac{2}{D} \int_0^F P'(K) \frac{dK}{K} + \frac{2}{D} \int_F^\infty C'(K) \frac{dK}{K}$$

となる (凸関数は常に右微分可能である). 一方 IV の定義式を K で微分して, プット・コールパリティも使うと

$$\frac{1}{D} P'(K) = \Phi(f_2(K)) + K \phi(f_2(K)) \sigma'(K) \sqrt{T}, \quad \frac{1}{D} C'(K) = \Phi(f_2(K)) - 1 + K \phi(f_2(K)) \sigma'(K) \sqrt{T}$$

を得る. ここで Φ は標準正規分布関数である. これらを上式に代入してさらに部分積分すると

$$2 \int_0^F \Phi(f_2(K)) \frac{dK}{K} + 2 \int_F^\infty (\Phi(f_2(K)) - 1) \frac{dK}{K} = -2 \int_0^\infty \log \frac{K}{F} \phi(f_2(K)) f_2'(K) dK$$

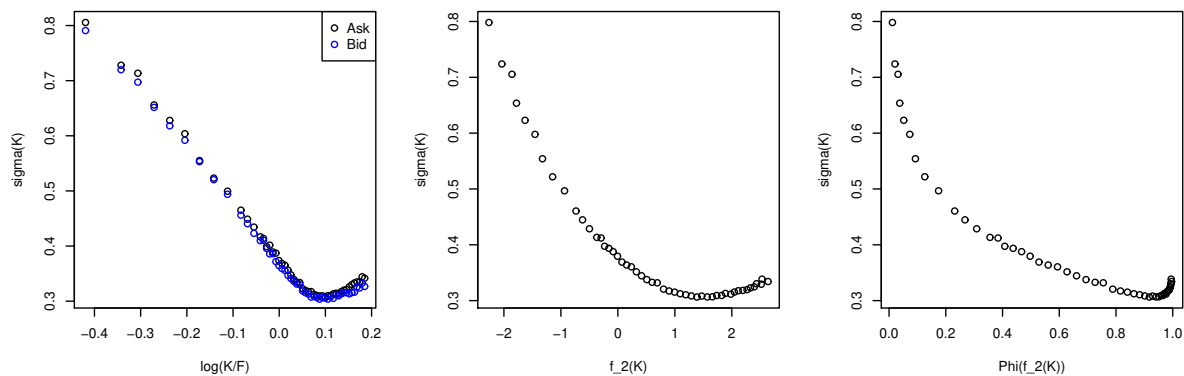


図 1 IV

そして

$$2 \int_0^{\infty} \phi(f_2(K)) \sigma'(K) \sqrt{T} dK = 2 \int_0^{\infty} \sigma(K) \sqrt{T} f_2(K) \phi(f_2(K)) f_2'(K) dK$$

となるから ($\phi'(z) = -z\phi(z)$ に注意), この 2 式の和として

$$2 \int_0^{\infty} \left(\sigma(K) \sqrt{T} f_2(K) - \log \frac{K}{F} \right) \phi(f_2(K)) f_2'(K) dK = \int_0^{\infty} \sigma(K)^2 T \phi(f_2(K)) f_2'(K) dK = T \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(g_2(z))^2 \phi(z) dz$$

のように (1) 式右辺が得られるのである。

(1) 式左辺はオプション価格の加重和の形をしているので、ボラティリティ指数を株価指数のオプション市場版とみなしたい向きには、この表現は魅力である。一方右辺は IV の (2 乗の) 加重平均の形をしているので、IV の補間と相性がよく、ボラティリティ指数の IV の要約統計量としての性質をよく表現している。

g_2 という非線形変換を経た $\sigma(g_2(z))^2$ の加重平均を取るということは、IV のグラフ横軸を K ではなく $z = f_2(K)$ のスケールで眺めることに相当する。さらに $w = \Phi(f_2(K))$ というスケールで眺めると

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(g_2(z))^2 \phi(z) dz = \int_0^1 \sigma_2(w)^2 dw, \quad \sigma_2(w) = \sigma(g_2(\Phi^{-1}(w)))$$

という新しい表現を得る。 $\Phi(f_2(K))$ は金融実務ではデュアルデルタと呼ばれる量で、FX オプションは実際にこのスケールで価格付けを行う慣行となっている。つまり行使価格 K に対して $P(K)$ (または $C(K)$) という形ではなく、 w に対して $\sigma_2(w)$ という形で価格付けを行うのである。対応する行使価格 $K = f_2^{-1}(\Phi^{-1}(w))$ は

$$\Phi^{-1}(w) = f_2(K) = \frac{\log(K/F) + \sigma_2(w)^2 T/2}{\sigma_2(w) \sqrt{T}}$$

から逆算できる。

スケールの選択は IV の補間・補外の質に大きな影響を与える。各スケールにおいて実際に IV がどのような形状となるか、2018 年 12 月 25 日の日経 225 オプション市場価格データから計算したものを図 1 に示す。限月は 2019 年 1 月で残存満期は 17 日間である。IV のビッド・アスクスプレッドが 0.02 未満のデータのみ使用し、中図、右図はビッド・アスクの中値を用いて計算している。尚、使用したオプション市場価格データは日経 NEEDS より取得している。(連続的) 定数補外は無裁定を保証する意味で最も安全な方法であるため、現在 VXJ 計算で採用しているが、図 1 を見れば (VIX 等の零補外よりましであるが) 不自然さは否めない。

3 ガンマ・スワップ

FX オプションの価格付けにおいてはデュアルデルタの代わりにデルタのスケール, つまり $\Phi(-f_1(K)) = 1 - \Phi(f_1(K))$ も用いられる. ここで

$$K \mapsto f_1(K) := -d_1(K, \sigma(K)) = \frac{\log(K/F) - \sigma(K)^2 T/2}{\sigma(K) \sqrt{T}}$$

である. f_2 同様, f_1 も単調増加であることが証明できる [5]. f_1 の逆関数を g_1 とし, $w = \Phi(-f_1(K))$ に対して価格づけられた IV を $\sigma_1(w) = \sigma(K)$ とすれば

$$\int_0^1 \sigma_1(w)^2 dw = \int_0^1 \sigma_1(1-w)^2 d\omega = \int_0^\infty \sigma(K)^2 \phi(f_1(K)) f_1'(K) dK = \int_{-\infty}^\infty \sigma(g_1(z))^2 \phi(z) dz$$

となる. 実はこれはガンマ・スワップと呼ばれるデリバティブの無裁定価格であることが以下のようにわかる. まず $K\phi(f_2(K)) = F\phi(f_1(K))$, $f_2'(K) = f_1'(K) + \sigma'(K) \sqrt{T}$ であることに注意して, 前節と同様の部分積分を行うと

$$\frac{2}{DF} \int_0^F P(K) \frac{dK}{K} + \frac{2}{DF} \int_F^\infty C(K) \frac{dK}{K} = T \int_{-\infty}^\infty \sigma(g_1(z))^2 \phi(z) dz \quad (2)$$

が得られる. 前月号と同様の議論から, 左辺はペイオフ $2 \frac{F_T}{F_0} \log \frac{F_T}{F_0}$ のモデルフリーな先渡価格であることが分かる. ここで F_t は時刻 $t \in [0, T]$ における原資産先物価格 (満期は T) である. 一方, 前月号で用いた Taylor 近似

$$\log \frac{F_{t_j}}{F_{t_{j-1}}} \approx \frac{F_{t_j} - F_{t_{j-1}}}{F_{t_{j-1}}} - \frac{1}{2} \left| \log \frac{F_{t_j}}{F_{t_{j-1}}} \right|^2$$

により, 時刻列 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ に対して

$$\begin{aligned} F_T \log F_T - F_0 \log F_0 &= \sum_{j=1}^n F_{t_j} \log F_{t_j} - F_{t_{j-1}} \log F_{t_{j-1}} \\ &= \sum_{j=1}^n F_{t_j} \log \frac{F_{t_j}}{F_{t_{j-1}}} + (F_{t_j} - F_{t_{j-1}}) \log F_{t_{j-1}} \\ &\approx \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} F_{t_j} \left| \log \frac{F_{t_j}}{F_{t_{j-1}}} \right|^2 + (F_{t_j} - F_{t_{j-1}}) (1 + \log F_{t_{j-1}}) \end{aligned}$$

となるから

$$\sum_{j=1}^n \frac{F_{t_j}}{F_0} \left| \log \frac{F_{t_j}}{F_{t_{j-1}}} \right|^2 \approx 2 \frac{F_T}{F_0} \log \frac{F_T}{F_0} + \text{初期費用 0 の運用収益}$$

という表現を得る. ガンマ・スワップとは左辺をペイオフとする先渡契約であり, この表現は (2) で計算される値が, ガンマ・スワップの (近似的) モデルフリーな無裁定価格であることを意味する.

ガンマという名前の由来は, ペイオフ $2 \frac{F_T}{F_0} \log \frac{F_T}{F_0}$ の特殊性であろう. ヨーロッパ型ペイオフ $2F_T \log F_T$ の時刻 $t \in [0, T]$ における Black-Scholes 先渡価格は, ボラティリティ・パラメータを v として Black-Scholes 方程式を解けば $2F_t \log F_t + F_t v^2 (T-t)$ であることが分かる. この価格の F_t に関する 2 回微分 (いわゆるガンマ) は $2/F_t$ となり, この v に依存しないシンプルな構造はガンマ・ヘッジ (またはベガ・ヘッジ) に有用である. ちなみに前月号で見た, バリエンス・スワップと本質的に等価なヨーロッパ型ペイオフ $-2 \log F_T$ の時刻 $t \in [0, T]$ における Black-Scholes 先渡価格は, $-2 \log F_t + v^2 (T-t)$ であり, したがってそのガンマは $2/F_t^2$ である.

4 デュアルと対称性

原資産が外国通貨 (つまり FX) の場合, ガンマ・スワップのペイオフは外貨側でみた FX 先物のバリエーション・スワップのペイオフの形をしている. ガンマ・スワップに等価なヨーロッパ型ペイオフも, 外貨から見た国内通貨に対する, バリエーション・スワップに等価なヨーロッパ型ペイオフに等しい. つまり (1) 式と (2) 式で計算される量はそれぞれ, FX 先物のボラティリティ (の二乗) に対する, 国内通貨側と外貨側それぞれによる評価値なのである. Black-Scholes モデルにおいてはこの二つの値は一致する. それは直接計算しても分かるが, Black-Scholes モデルに従う外貨から国内通貨を見ると (つまり逆数をとると) やはり同じボラティリティ・パラメータの Black-Scholes モデルになることから明らかである.

FX の場合に限らず, 原資産を基準財とした評価は, IV の対称性に関する興味深い知見をもたらす. プットオプション価格をリスク中立確率 Q による期待値 (前月号参照) として

$$P(K) = DE^Q[(K - F_T)_+]$$

と書いたとき, 原資産を基準財とした価格付け測度 (リスク中立確率) \hat{Q} は

$$\hat{Q}(A) = E^Q[F_T/F_0; A]$$

で与えられる. そこで $\hat{F}_t = F_t^2/F_0$ とおけば,

$$P(K) = \frac{K}{F_0} DE^{\hat{Q}}[(\hat{F}_T - F^2/K)_+]$$

となる. $\hat{F}_0 = F_0$ だから Black-Scholes モデル, またはより一般にレバレッジなしの確率ボラティリティモデルでは Q の下での F_T の分布と, \hat{Q} の下での \hat{F}_T の分布が一致し, 上式は

$$P(K) = \frac{K}{F_0} C(F^2/K)$$

を意味する. これはプット・コール対称性と呼ばれ [3], IV の言葉では $\sigma(K) = \sigma(F^2/K)$ となり, IV が $\log(K/F)$ のスケールで偶関数となることと同値である. つまり $\tilde{\sigma}(k) = \sigma(Fe^k)$ とおけば, $\tilde{\sigma}(k) = \tilde{\sigma}(-k)$ となるのである. 図 1 で見たように, 市場価格から計算される IV はこの対称性を持たない. その非対称性は Q と \hat{Q} による価格付けの差に反映されることになり, とくに (1) 式の値と (2) 式の値が乖離するのである.

5 IV スキューの摂動計算

ここでは [9] のアイデアを元にして, 形式的な近似計算によって (1) 式と (2) 式の値の差

$$\alpha := \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(g_1(z))^2 \phi(z) dz - \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(g_2(z))^2 \phi(z) dz$$

が IV スキュー, つまり IV の ATM 付近の傾きに比例することを示す. 次のような IV の摂動展開を仮定しよう ([6] 参照): 適当な摂動パラメータ $\epsilon \rightarrow 0$ に対して

$$\tilde{\sigma}(k) = \sigma_* + \delta k + o(\epsilon), \quad \sigma_* > 0, \quad \delta = O(\epsilon).$$

このとき近似的な意味で δ が IV の ATM 付近の傾きである。任意の k に対して、 $\epsilon \rightarrow 0$ で $\tilde{\sigma}(k) \rightarrow \sigma_*$ なので、この摂動は Black-Scholes モデル周りの摂動である。この δ と α の関係を導く。 $\tilde{f}_i(k) = f_i(Fe^k)$, $i = 1, 2$ とおき、またそれぞれの逆関数を \tilde{g}_i とおく。 $\sigma(g_i(z)) = \tilde{\sigma}(\tilde{g}_i(z))$ であることに注意しよう。 $z = \tilde{f}_2(k)$ とおけば定義より

$$\tilde{g}_2(z) = k = \tilde{\sigma}(k) \sqrt{Tz} - \frac{\tilde{\sigma}(k)^2 T}{2} = \sigma_* \sqrt{Tz} - \frac{\sigma_*^2 T}{2} + O(\epsilon)$$

となる。同様に

$$\tilde{g}_1(z) = \sigma_* \sqrt{Tz} + \frac{\sigma_*^2 T}{2} + O(\epsilon)$$

となるから、

$$\sigma(g_1(z))^2 - \sigma(g_2(z))^2 = \tilde{\sigma}(\tilde{g}_1(z))^2 - \tilde{\sigma}(\tilde{g}_2(z))^2 = 2\sigma_* \delta(\tilde{g}_1(z) - \tilde{g}_2(z)) + o(\epsilon) = 2\delta\sigma_*^3 T + o(\epsilon)$$

を得る。ここから (形式的には) α と δ の近似的比例関係

$$\alpha = 2\delta\sigma_*^3 T + o(\epsilon)$$

が従う。厳密な証明については [8] を参照されたい。この関係から α は IV の非対称性の指標とみなせる。

市場で観測される IV スキューはベキ型の期間構造を持つことが知られており、それを説明するラフ・ボラティリティモデルが近年注目を集めている (文献は <https://sites.google.com/site/roughvol/home> を参照)。

本稿では f_1 と f_2 によるスケール変換を考えたが、 f_1 と f_2 は共に単調増加なので、その凸結合も単調増加である。この凸結合スケールでみた IV とベキ型のペイオフとの興味深い対応が [2, 4] で議論されている。

参考文献

- [1] CBOE VIX White Paper. Available at <https://www.cboe.com/micro/vix/vixwhite.pdf>
- [2] L. Bergomi (2016). Stochastic Volatility Modeling. Chapman&Hall/CRC.
- [3] Peter Carr and Roger Lee (2009). PUT-CALL SYMMETRY: EXTENSIONS AND APPLICATIONS. Math. Finance 19, 523-560.
- [4] S. De Marco and C. Martini (2017). Moment generating functions and normalized implied volatilities: unification and extension via Fukasawa's pricing formula. Quant. Finance 17, 609-622.
- [5] M. Fukasawa (2012). THE NORMALIZING TRANSFORMATION OF THE IMPLIED VOLATILITY SMILE. Math. Finance 22, 753-762.
- [6] M. Fukasawa (2011). Asymptotic analysis for stochastic volatility: martingale expansion, Finance Stoch. 15, 635-654.
- [7] M. FUKASAWA, I. ISHIDA, N. MAGHREBI, K. OYA, M. UBUKATA, AND K. YAMAZAKI (2011). MODEL-FREE IMPLIED VOLATILITY: FROM SURFACE TO INDEX. http://www-mmds.sigmath.es.osaka-u.ac.jp/structure/activity/vxj/VXJ_DP.pdf
- [8] M. Fukasawa (2014). Volatility derivatives and model-free implied leverage, IJTAF 17, no.1, 1450002.
- [9] A. Neuberger (2009). The Slope of the Smile, and the Comovement of Volatility and Returns. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=1358863>.

本資料に関する著作権は、株式会社大阪取引所にあります。

本資料の一部又は全部を無断で転用、複製することはできません。

本資料の内容は、株式会社大阪取引所の意見・見解を示すものではありません。

本資料は、デリバティブ商品の取引の勧誘を目的としたものではありません。