

ハミルトニアン・モンテカルロ法による 非対称 SV モデルの推定 － 日経 225 先物, TOPIX 先物 － (第 2 回)

日本大学経済学部 戸塚英臣

日本大学経済学部 三井秀俊

1. はじめに

前号では, ハミルトニアン・モンテカルロ (Hamiltonian Monte Carlo, 以下 HMC) 法について概観し, 確率的ボラティリティ変動モデル (Stochastic Volatility Model, 以下 SV モデル) によるテストデータを用いて HMC 法の有効性を検証した. 本稿では, 非対称 SV (以下 SVL) モデルを用いて日経 225 先物と TOPIX 先物の日次収益率について HMC 法による実証分析を行う. 日経 225 先物等のリスク資産収益率データを使用した SVL モデルによる実証分析には先行研究があるので, 先行研究と比較することで HMC 法の有効性についても議論する.

2. 日次収益率の計算方法

ここでは, 日経 225 先物と TOPIX 先物の日次収益率 (%) の求め方について述べる. S_t を t 時点の日経 225 先物の株価とすると, t 時点の日経 225 先物の日次収益率 y_t は以下のようなになる.

$$y_t = (\ln S_t - \ln S_{t-1}) \times 100 . \quad (1)$$

また, $Index_t$ を t 時点の TOPIX 先物の水準とすると, t 時点の TOPIX 先物の日次収益率 y_t は以下のようなになる.

$$y_t = (\ln Index_t - \ln Index_{t-1}) \times 100 . \quad (2)$$

3. 実証分析

3.1. データ

(1) 式と (2) 式で定義されるそれぞれの日次収益率の算出には, Bloomberg から取得した日経 225 先物と TOPIX 先物の中心限月の終値を用いた. ただし, 日中に取引される日経 225 先物と TOPIX 先物を研究対象とし, ナイト・セッションに関しては研究対象とし

ない¹⁾。データの期間は2017年1月4日から2019年12月30日までである。そして、それぞれの日次収益率のサンプル期間は2017年1月5日から2019年12月30日までであり、観測個数は732である。

表1に日経225先物とTOPIX先物の日次収益率の要約統計量を示す。日経225先物とTOPIX先物の日次収益率の歪度はそれぞれ-0.6826と-0.6395であり、日経225先物とTOPIX先物の日次収益率の分布はどちらも左に歪んでいることが分かる。また、日経225先物とTOPIX先物の日次収益率の超過尖度はそれぞれ3.5420と3.8176であり、これは「正規分布の超過尖度=0」より大きいので日経225先物とTOPIX先物の日次収益率の分布はどちらも正規分布よりも裾が厚いことが分かる。

表1: 日経225先物とTOPIX先物の日次収益率の要約統計量

	2017/1/5 - 2019/12/30 観測個数 732					
	平均	標準偏差	歪度	超過尖度	最大値	最小値
日経225先物	0.0292	1.0169	-0.6826	3.5420	3.1974	-5.5370
TOPIX先物	0.0170	0.9533	-0.6395	3.8176	3.8552	-5.5009

3.2. 実証結果

HMC法によるベイズ推定においては、稼働検査期間として最初の10,000個を捨てた後、100,000個の確率標本を発生させ5つおきに合計20,000個の結果を用いた。なお、本稿における数値計算は全てC言語を用いている。

本稿では、パラメータ $\theta = (\phi, \sigma_\eta, \rho, \mu)$ に加え、ボラティリティの対数値 $h = (h_1, \dots, h_n)$ を潜在変数としてサンプリングしている。HMC法では複数の確率変数を一度にアップデートしても採択確率が低下しないので、パラメータ θ とボラティリティの対数値 h をそれぞれ同時にアップデートしている。表2にHMC法でサンプリングしたパラメータ θ とボラティリティの対数値 h の採択確率を示す。表2から、パラメータ θ の採択確率は、日経225先物とTOPIX先物のどちらの場合でも93%以上と高い値である。また、ボラティリティの対数値 h の採択確率は、パラメータ θ よりも更に高く、99%以上である。

表2: θ と h の採択確率

	θ	h
日経225先物	93.6 %	99.9 %
TOPIX先物	93.6 %	99.9 %

¹⁾本研究では、CME (Chicago Mercantile Exchange) や SGX-DT (Shingapore Exchange Derivatives Trading Limited) で取引されている日経225先物も対象外とする。

(1) 日経 225 先物

図 1 に HMC 法によるベイズ推定により得られた日経 225 先物の標本自己相関関数, 標本経路, 事後確率密度関数を示す. 標本自己相関関数はいずれのパラメータにおいても十分に減衰していることが分かる. これより HMC 法によりサンプリングされたパラメータの定常分布への収束は十分に速いと言える. また, いずれのパラメータの標本経路も安定した動きで十分に状態空間全体を推移していると思われ得ることから, 定常分布に収束していると考えられる.

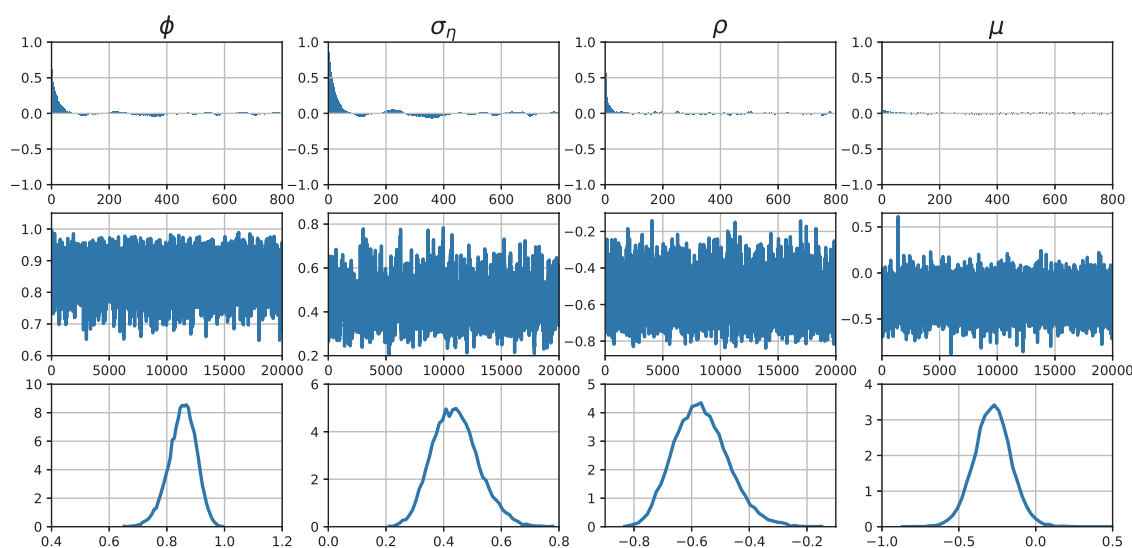


図 1: 日経 225 先物を用いた SVL モデルの推定結果

標本自己相関関数 (上段), 標本経路 (中段), 事後確率密度関数 (下段).

表 3: 日経 225 先物の日次収益率を用いた SVL モデルの推定結果

$$y_t = \exp(h_t/2)u_t,$$

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t,$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim i.i.d.\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho\sigma_\eta \\ \rho\sigma_\eta & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix}\right).$$

	ϕ	σ_η	ρ	μ
事後平均	0.8536	0.4422	-0.5667	-0.2810
事後標準偏差	0.0475	0.0801	0.0475	0.1211
95% 信用区間	[0.7702, 0.9266]	[0.3191, 0.5834]	[-0.7121, -0.4044]	[-0.4775, -0.0836]
非効率性因子	14.2	23.8	13.3	4.2

表 3 に日経 225 先物の日次収益率を用いて推定されたパラメータ θ の事後平均, 事後標準偏差, 95% 信用区間, 非効率性因子を示す。ここではファイナンスで重要な 2 つのパラメータ ϕ と ρ について詳しく検証する。

最初に, ボラティリティに対するショックの持続性を表すパラメータ ϕ について検証する。表 3 から ϕ の事後平均は 0.8536 と 1 に近いことから, ボラティリティに対するショックが高い持続性を持つことが分かる。この結果は過去の研究²⁾ と整合的な結果となっている。さらに, ボラティリティに対するショックの持続性について調べるために, 図 2 にボラティリティの対数値 h の自己相関関数 (Autocorrelation function, 以下 ACF) を示す。ここでは, ボラティリティの対数値 h の事後平均を用いている。図 2 からボラティリティの対数値 h の ACF の減衰が非常に遅いことが分かる。これは, ボラティリティの対数値 h が長期記憶性を持つことを示している。SVL モデルでは, パラメータ θ に加え, ボラティリティの対数値 h も潜在変数として推定している。従って, ϕ の事後平均によるボラティリティに対するショックの持続性が高いという結果とボラティリティの対数値 h の ACF から得られた h が長期記憶性を持つという結果は整合していることから, ボラティリティの対数値 h の推定も十分良い結果であると考えられる。

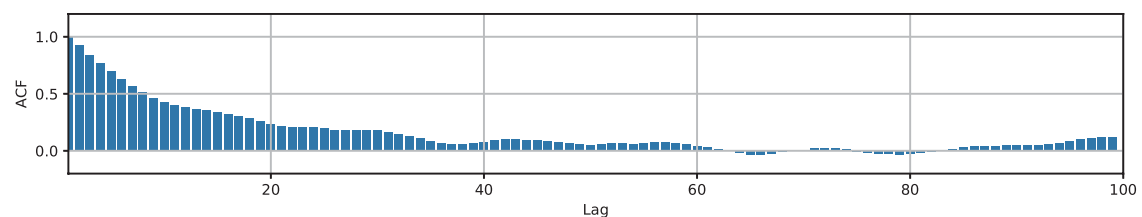


図 2: 日経 225 先物のボラティリティの対数値 h の ACF (2017/1/5 – 2019/12/30)

次に, 日経 225 先物の日次収益率とボラティリティとの間の相関を表すパラメータである ρ について検証する。 ρ の事後分布は -0.5667 と負の値であり, さらに, その 95% 信用区間も $[-0.7121, -0.4044]$ であることから ρ が負である事後確率は 95% より大きいと言える。 ρ が負であることから, 日経 225 先物の日次収益率とボラティリティの対数値との間には負の相関があることが検証された。さらに, 日経 225 先物の日次収益率とボラティリティの対数値との関係を調べるために, 図 3 に日経 225 先物の日次収益率とボラティリティの対数値 h のグラフを示す。図 3 の青線とオレンジ線はそれぞれ日経 225 先物の日次収益率とボラティリティの対数値である。なお, ボラティリティの対数値 h には事後平均を用いた。図 3 から, 日次収益率が低いところでボラティリティが高く, また, その逆の傾向を見て取ることができる。従って, 図 3 から, 日経 225 先物の日次収益率とボラティリティとの間に負の相関があることが分かる。なお, HMC 法で推定されたパラメータ θ は先行研究³⁾ と整合的な結果となっている。

²⁾Jacquier *et al.* (1994) は, それまでの SV モデルを推定した文献をサーベイし, ϕ の推定値には 0.8 から 0.995 までの値が得られているとしている。

³⁾例として, 三井 (2018) を参照。

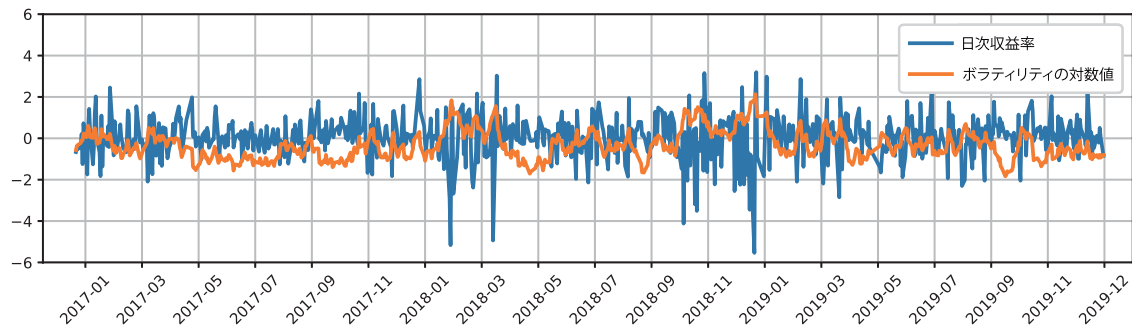


図 3: 日経 225 先物の日次収益率とボラティリティの対数値 h (2017/1/5 – 2019/12/30)

最後に, HMC 法の非効率性因子の値はあまり小さくなく, 最も大きい σ_η であっても 24 程度であり, この結果は先行研究⁴⁾ と整合的である.

(2) TOPIX 先物

図 4 に HMC 法によるベイズ推定により得られた TOPIX 先物の標本自己相関関数, 標本経路, 事後確率密度関数を示す. 図 4 から標本自己相関関数の収束性や標本経路の傾向等は, 日経 225 先物と同様の振る舞いを示していることが分かる.

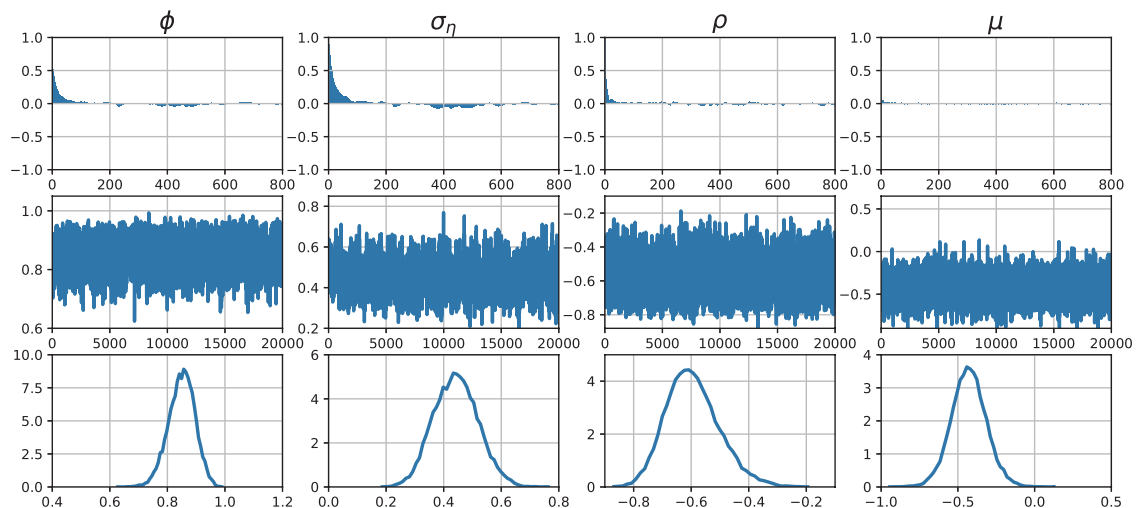


図 4: TOPIX 先物 を用いた SVL モデルの推定結果

標本自己相関関数 (上段), 標本経路 (中段), 事後確率密度関数 (下段).

表 4 に TOPIX 先物の日次収益率を用いて推定された事後平均, 事後標準偏差, 95% 信用区間, 非効率性因子を示す. 日経 225 先物と同様に ϕ と ρ の推定結果について検証する.

⁴⁾例として, 大森・渡部 (2008) を参照.

最初に、ボラティリティに対するショックの持続性を表すパラメータ ϕ について検証する。表 4 から ϕ の事後平均は 0.8492 と 1 に近いことから、TOPIX 先物も日経 225 先物と同様にボラティリティのショックが高い持続性を持つことが分かる。

表 4: TOPIX 先物の日次収益率を用いた SVL モデルの推定結果

$$y_t = \exp(h_t/2)u_t,$$

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t,$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim i.i.d.\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho\sigma_\eta \\ \rho\sigma_\eta & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix}\right).$$

	ϕ	σ_η	ρ	μ
事後平均	0.8492	0.4422	-0.5945	-0.4290
事後標準偏差	0.0460	0.0767	0.0926	0.1249
95% 信用区間	[0.7701, 0.9215]	[0.3197, 0.5714]	[-0.7344, -0.4319]	[-0.6149, -0.2405]
非効率性因子	16.1	25.6	14.5	4.0

ボラティリティに対するショックの持続性を検証するために、図 5 に TOPIX 先物のボラティリティの対数値 h の事後平均による ACF を示す。なお、ショックの持続性の違いを見るために、図 5 には TOPIX 先物と日経 225 先物の両方のボラティリティの対数値 h の ACF を示している。図 5 から 2 つの特徴を見ることができる。一つ目の特徴は、日経 225 先物の日次収益率の結果と同様に、TOPIX 先物のボラティリティの対数値 h の ACF の減衰が非常に遅いことである。これより、TOPIX 先物の日次収益率でもボラティリティの対数値 h の推定も十分良い結果であると言える。二つ目の特徴は、TOPIX 先物によるボラティリティの減衰が日経 225 先物のボラティリティのそれよりも若干遅いということである。

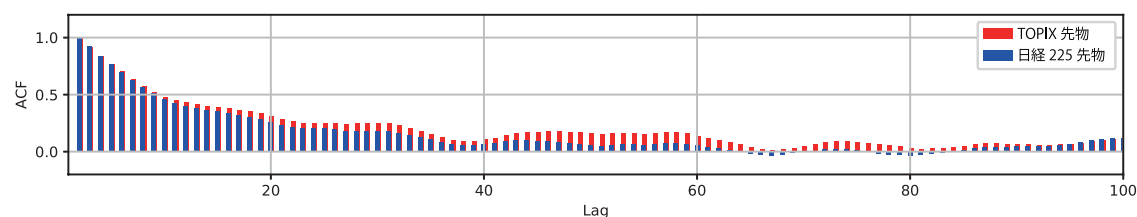


図 5: TOPIX 先物と日経 225 先物のボラティリティの対数値 h の ACF (2017/1/5 – 2019/12/30)

次に、TOPIX 先物の日次収益率とボラティリティとの間の相関を表すパラメータである ρ について検証する。 ρ の事後分布は -0.5945 と負の値であり、さらに、95% 信用区間も [-0.7344, -0.4319] であることから ρ が負である事後確率は 95% より大きいと言え

る。従って、 ρ が負であることから、日経 225 先物と同様に TOPIX 先物の日次収益率とボラティリティの対数値との間には負の相関があることが検証された。さらに、TOPIX 先物の日次収益率とボラティリティの対数値との関係を調べるために、図 6 に TOPIX 先物の日次収益率から推定されたボラティリティの対数値 h のグラフを示す。青線とオレンジ線はそれぞれ TOPIX 先物の日次収益率とボラティリティの対数値の事後平均である。図 6 から、日次収益率が低いところではボラティリティが高く、また、その逆の傾向を見て取ることができる。従って、図 6 から、TOPIX 先物の日次収益率とボラティリティとの間に負の相関があることが分かる。

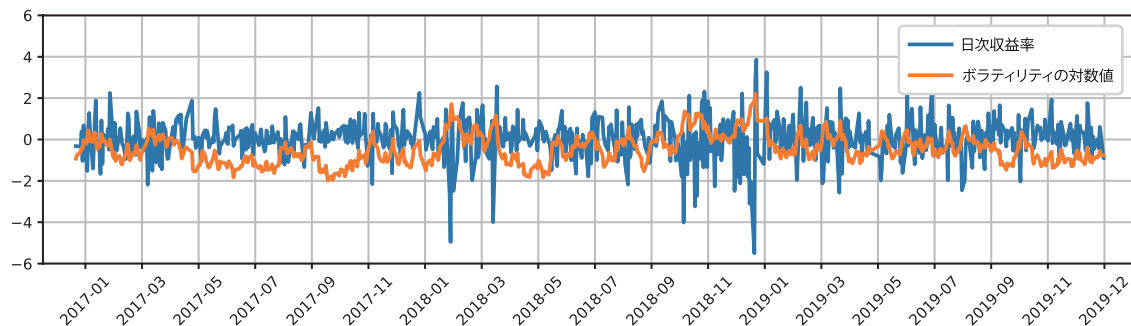


図 6: TOPIX 先物の日次収益率とボラティリティの対数値 h (2017/1/5 – 2019/12/30)

非効率性因子の値は、日経 225 先物と同様にあまり大きくなく、最も大きい σ_η であっても 26 以下である。

4. まとめ

本稿は、HMC 法を用いて SVL モデルにより日経 225 先物と TOPIX 先物の日次収益率を用いて実証分析を行った。HMC 法を用いた日経 225 先物の日次収益率データによる SVL モデルのパラメータの推定結果は、先行研究と整合的であることが分かった。また、TOPIX 先物の日次収益率データによる SVL モデルのパラメータ ϕ と ρ に関しては、日経 225 先物の日次収益率データによる SVL モデルのパラメータと同様な傾向を示すことが分かった。さらに、MCMC 法の効率性を示す非効率性因子から、HMC 法が他のサンプリング法と比較しても十分有効であることも分かった。

今後の課題としては、計算精度と計算の収束性の向上⁵⁾ が挙げられる。計算精度の向上に関しては、Leapfrog 法を行う際のパラメータ（更新回数と更新の大きさ）を自動的に決定する No-U-Turn アルゴリズム⁶⁾を導入する必要がある。また、計算の収束性を改良する試みとして、高次元パラメータ空間のリーマン幾何学を活用し効率的なサンプリングを行

⁵⁾ 収束とは定常分布へ達することを指し、計算の収束性の向上とは稼働検査期間の短縮を意味する。

⁶⁾ 詳しくは、Hoffman and Gelman (2014) を参照。

えるリーマン多様体 HMC 法⁷⁾等が提唱されている。これらの方法について今後検討する必要があると考えられる。

参考文献

- [1] Girolami, M. and Calderhead, B. (2011), “Riemann Manifold Langevin and Hamiltonian Monte Carlo Methods,” *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* 73, pp. 873–889.
- [2] Hoffmani, M. D. and Gelman, A. (2014), “The No-U-Turn Sampler: Adaptively Setting Path Lengths in Hamiltonian Monte Carlo,” *Journal of Machine Learning Research*, 15, pp. 1593–1623.
- [3] Jacquier, E., Polson, N. and Rossi, P. (1994), “Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Models (with Discussion),” *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 12, pp. 371–417.
- [4] 大森裕浩・渡部敏明 (2008), 「MCMC 法とその確率的ボラティリティ変動モデルへの応用」, 国友直人・山本拓 (編) 『21 世紀の統計科学 I 社会・経済と統計科学』東京大学出版会, 第 9 章, pp. 223–266.
- [5] 三井秀俊 (2018), 「非対称確率的分散変動モデルによる日経 225 先物の分析」, 日本取引所グループ 『先物・オプションレポート』, Vol. 30, No. 4, pp. 1–6.

本資料に関する著作権は、株式会社大阪取引所にあります。

本資料の一部又は全部を無断で転用、複製することはできません。

本資料の内容は、株式会社大阪取引所の意見・見解を示すものではありません。

本資料は、デリバティブ商品の取引の勧誘を目的としたものではありません。

⁷⁾詳しくは、Girolami and Calderhead (2011) を参照。