

市場価格急変予兆の検出について

大阪大学 大学院経済学研究科

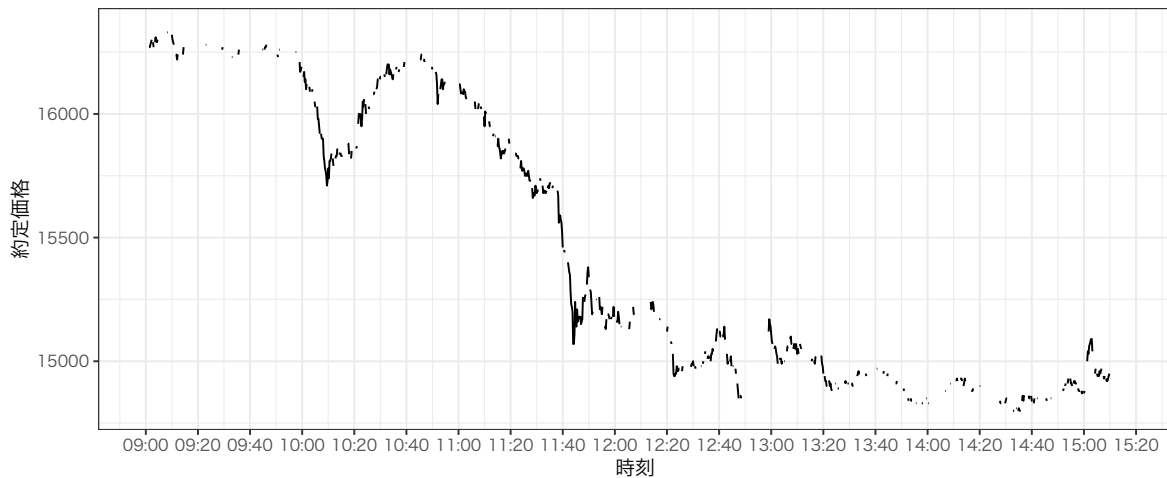
数理・データ科学教育研究センター 大屋幸輔

1 はじめに

金融市場では様々な金融商品が取引されており、市場関係者、取引参加者のいずれもが、それら金融商品の価格系列の動向に注視していることは言うまでもない。事前に価格急変の予兆をとらえることができるのであれば、誰しもがその変化に備える行動をとることによって実際には予期された変化は起こらないとも考えられる。また逆に、人々の行動がその変化の時点を早め、その規模を大きくしてしまうと考えることもできる。特に後者に対する市場の備えとしては、過度な値動きを抑制する観点から呼値の可能な範囲を一定範囲内に制限する制限値幅制度や、相場が過熱してきた場合に取引を一時中断するサーキット・ブレーカー制度がある。その制度自体の有効性については興味深い論点であるが、高頻度データに基づく詳細かつ丁寧な検証が必要であり、本稿の目的とは異なるので、その制度の有効性についての議論はここでは行わない。

図1が示しているのは、2016年6月24日の日経225先物9月物の約定価格の推移である。15秒間隔でのスナップショットであるが、前場では約定がなかった時点も散見される。この日はEU離脱か残留かをめぐっての英国の国民投票の結果に関するニュースの影響を大きく受け、12時48分にサーキット・ブレーカーが発動されている。制限値幅を

図1: 日経225先物 (2016年6月24日)



超えた価格の変化が生じたこの日は、前場において度々の大きな価格急落が観測されている。そのような大きな価格急落は平常な市場で観測される可能性は極めて低く、図1で示したような価格系列をモデル化するには、平常な市場における価格系列を表すモデルに下方ジャンプを表すランダムな項を取り入れるか、急落時には平常時のモデルとは別のモデルに価格系列が従っているとするアプローチが考えられる。本稿では後者の観点から、観測している価格系列が平常時のモデルから急落時のモデルに切り替わる時点を統計的に検出する研究をとりあげ、そのアプローチが市場の価格急変の予兆検出に応用可能かどうかをみていく。

2 モデル

観測系列を統計モデルによって記述し、一つのモデルから別のモデルに切り替わる時点、あるいは観測しているデータが想定しているモデルに従わなくなった時点を統計的に検出する問題は変化点問題として知られており、これまで多くの研究が行われている。ここではその一つとして、Phillips and Shi (2019)で提案されているモデル、および統計的推測方法に関して説明していく。まずはじめに価格が急落する期間のモデルを以下のように表す。

$$\log P_t = -L_t + \log P_{t-1} + \varepsilon_t \quad (1)$$

ε_t はマルチンゲール差分に従う系列で、その分散を σ^2 とする。さらに L_t を ε_t とは独立な (2) で表されるランダムな列とする。

$$L_t = L b_t, b_t \sim i.i.d.U[-\epsilon, 1], \epsilon < 1 \quad (2)$$

b_t は独立・同一に一様分布に従う確率変数列で、その平均は $E[b_t] = (1 - \epsilon)/2 > 0$ である。正の定数 L は b_t で表現されるショックの大きさを表すスケールである。(1)の右辺に登場するこの $-L_t$ は(対数)価格 $\log P_t$ を駆動する確率的要因の一つで、 $E[-L_t] = -L(1 - \epsilon)/2 < 0$ であることから、価格系列を平均的に下方にシフトさせるランダムな要因を表している。またこの $-L_t$ は平均的には負の値をとるが、個々の実現値としては正の値をとる可能性を排除しておらず、 b_t の実現値によっては、正の方向にシフトすることも許容している。そして、この $-L_t$ の導入は価格系列が下方に変化していくとき、そのボラティリティが平常時に比べて大きくなることも(1)を書き換えた以下の式で表すことができる。

$$\log P_t = -E[L_t] + \log P_{t-1} + u_t, \quad u_t = \varepsilon_t - (L_t - E[L_t]) \quad (3)$$

対数収益率 $\Delta \log P_t$ は平均 $-E[L_t] = -L(1 - \epsilon)/2 < 0$ で、その分散は $\text{var}[u_t] = \sigma^2 + L^2(1 + \epsilon)^2/12$ となっているが、平常時は $L = 0$ であるとすれば、価格急落時にはボラティリティが平常時よりも大きくなっていることが捉えられていることがわかる。

観測期間を $t = 1, \dots, T$ としたとき、途中の時点 T_c で平常時の価格過程から、(1) で表した価格過程に変わるとしたモデルは以下で表すことができる*¹。

$$\log P_t = \begin{cases} kT^{-\gamma} + \log P_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{if } t \in N \equiv [1, T_c] \\ -L_t + \log P_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{if } t \in C \equiv (T_c, T] \end{cases} \quad (4)$$

価格過程が平常な区間を N で、急落している区間を C であらわしている。観測している価格が区間 N から区間 C に最初に入った時点が価格急変の時点となる。誤差項 ε_t に対しては、均一分散をもつ平均ゼロの独立な系列、あるいはいわゆる GARCH 過程をそのクラスに持つような条件付き不均一分散を許容する仮定（詳細は、Phillips and Shi (2019) 参照）を課すことにより、以下で説明する検定統計量とその漸近分布が導出される。

Phillips, Shi and Yu (2015a), Phillips, Shi and Yu (2015b) (以降、PSY(2015ab)) は金融時系列データからバブルを検証する recursive and moving window 法を提案しているが、その検証方法における帰無仮説のもとでのモデルは、(4) での $t \in N$ でのモデルであり、検定統計量およびその漸近分布は Phillips and Shi (2019) と同じものである。PSY(2015ab) における対立仮説はバブルを検証するためのものであり、(4) での $t \in C$ でのモデルではないが、PSY(2015ab) で提案された recursive and moving window 法は、ここでの区間 N から C への切り替わりの時点を検出する方法としても有効であり、逐次的にモデルの変化を検証する代表的な方法である CUSUM 法よりも検出力が高いことが Phillips and Shi (2019) で報告されている。

3 PSY recursive and moving window 法

検証の対象となる帰無仮説のもとでのモデルを再掲すると

$$\log P_t = g_T + \log P_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (5)$$

*¹ 区間 N では、 $kT^{-\gamma}$ ($\gamma > 1/2$) を導入し、漸近的には無視できる、ゆるやかなドリフトを表現している。

ただし $g_T = kT^{-\gamma}$ (定数 $\gamma > 1/2$) としている。

ここで推論の対象となるモデルは

$$\log P_t = \mu + \rho \log P_{t-1} + \varepsilon_t \quad (6)$$

であり、誤差項に対する仮定は Phillips and Shi (2019) にあるものとする。このモデル (6) に対する単位根 (Unit root) 検定は $\log P_t$ から平均を除去 (demean) したものを \tilde{X}_t としたとき、次の回帰モデル

$$\Delta \tilde{X}_t = \beta \tilde{X}_{t-1} + \varepsilon_t, \text{ where } \beta = \rho - 1 \quad (7)$$

の係数 β に関する帰無仮説 $H_0 : \beta = 0$, 対立仮説 $H_1 : \beta < 0$ を検定するための検定統計量を使って行われる。

recursive and rolling window 法では、分析対象となる期間を $t = 1, \dots, T$ としたとき、 $T_1 \equiv \lfloor r_1 T \rfloor$ から $T_2 \equiv \lfloor r_2 T \rfloor$ の区間でモデル (7) の β を最小 2 乗法によって推定し、検定統計量が求められる。ただし $0 < r_1 < r_2 < 1$ で、記号 $\lfloor \cdot \rfloor$ は整数部分を表している。

区間 $[T_1, T_2]$ で推定された (7) の係数 β の推定量からの DF 統計量は以下の通り。

$$DF_{r_1}^{r_2} = \frac{\sum_{j=T_1}^{T_2} \tilde{X}_{j-1} (\tilde{X}_j - \tilde{X}_{j-1})}{\left[\hat{\sigma}_{r_1 r_2}^2 \sum_{j=T_1}^{T_2} \tilde{X}_{j-1}^2 \right]^{1/2}} \quad (8)$$

ここで $\hat{\sigma}_{r_1 r_2}^2$ は区間 $[T_1, T_2]$ で推定された誤差項の分散の推定値である。

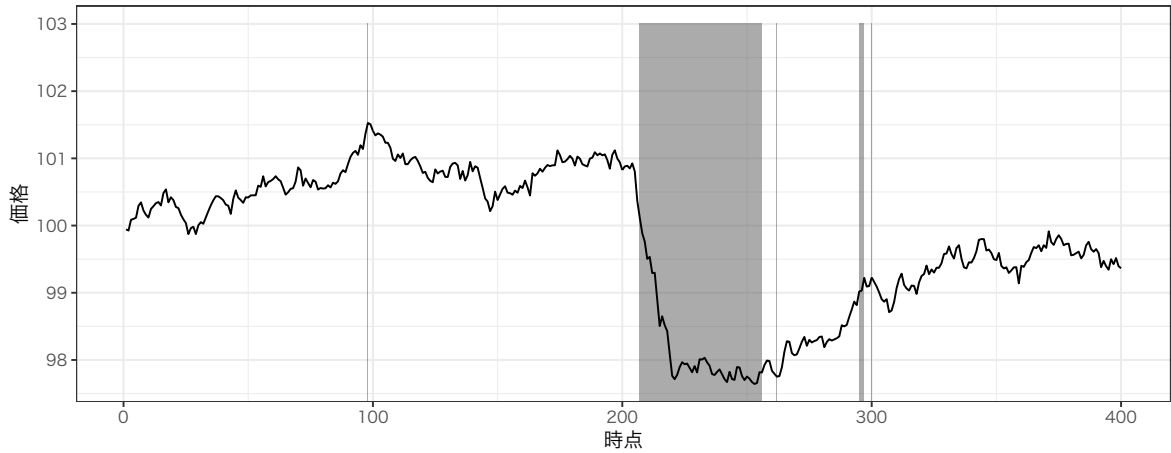
Backward sup DF 統計量

DF 統計量 (8) は区間 $[T_1, T_2]$ での (7) における係数 β に対する仮説を検証するための統計量である。いま、観測対象の系列の特定の観測時点 $T_r \equiv \lfloor rT \rfloor$ において、モデルが区間 N のものなのか、 C のものなのかに関心があるとす。 T_r 時点より過去の観測値で構成される区間で検証を行うことになるが、可能な範囲で区間の初期時点を変え、その変更におけるそれぞれの検定統計量の最大値を以下の Backward sup DF 統計量としている*2。

$$BSDF_r(r_0) = \sup_{r_1 \in [0, r-r_0], r_2=r} DF_{r_1}^{r_2} \quad (9)$$

*2 数学的には、初期時点の選択は r を連続的に変化させて行うので、上限 (sup) とすべきであるが、説明の簡単化のために最大値と表現している。

図2: 数値例：時点201から220が区間C, それ以外の時点は区間N



Notes: 影付きのエリアはPSY検定統計量がブートストラップ法で求めた95%の臨界値を超えている期間

(7) の推定に必要な最小のサンプルサイズは $\lfloor r_0 T \rfloor$ によって与えられる*³。帰無仮説のもとでの (9) の漸近分布は PSY(2015a) で与えられているが, Phillips and Shi (2019) では実際の検定に必要な臨界値を Bootstrap 法によってもとめている。さらに, $T_1 = \lfloor r_1 T \rfloor \in N$, $T_2 = \lfloor r_2 T \rfloor \in C$ のときに, $DF_{r_1}^{r_2} = O_p(T^{1/2}) \rightarrow +\infty (T \rightarrow \infty)$ となることから, (9) の漸近的な検出力は 1 となることが示されている。一方で, $T_1, T_2 \in N$, あるいは $T_1, T_2 \in C$ のいずれにおいても, (9) は特定の分布に収束することが示されるので, 平常な区間 N から急落時の区間 C に変わる時点をこの検証方法によって特定できることがわかる。

4 数値例

ここでは前節で説明した検出方法を適用した数値例を示す。サンプルサイズ $T = 400$, $L_t = 0.004b_t$, $b_t \sim i.i.d.U[-0.1, 1]$, $\varepsilon_t \sim i.i.d.N(0, 0.001^2)$, $\log P_0 = \log 100$ とし, 以下の (10) によって $\log P_t$ を生成した。

$$\log P_t = \begin{cases} 0.02T^{-\gamma} + \log P_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{if } t \in [1, 200] \\ -L_t + \log P_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{if } t \in (200, 220] \\ 0.02T^{-\gamma} + \log P_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{if } t \in (220, 400] \end{cases} \quad (10)$$

生成された $\log P_t$ に対して, Backward sup DF 統計量を適用した結果が図 2 である。継続して 2 時点以上 95% の臨界値を超えたのは時点 207 から時点 256, 時点 295 から時

*³ Phillips, Shi and Yu (2015a) が実用的な設定として, $r_0 = 0.01 + 1.8/\sqrt{T}$ を推奨している。

点 297 であった。区間 C の検出については、若干の後方へのバイアスがみられる。また平常な区間において、平常でないと判断をしている箇所もある。下方へのショックの大きさ、ショックの継続期間などにも検出結果は依存するが、概ね、区間 C を検出できていると言えよう。

5 おわりに

次号では日経 225 先物、日経平均株価などの時系列に実際に適用し、結果について検討していく。

参考文献

- Phillips, P. C. B. and Shi, S. (2019), “Detecting financial collapse and ballooning sovereign risk,” *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 81(6), 1336–1361.
- Phillips, P. C. B., Shi, S. and Yu, J. (2015a), “Testing for multiple bubbles: Historical episodes of exuberance and collapse in the S&P 500,” *International Economic Review*, 56, 1043–1078.
- Phillips, P. C. B., Shi, S. and Yu, J. (2015b), “Testing for multiple bubbles: Limit theory of real-time detectors,” *International Economic Review*, 56, 1079–1134.

本資料に関する著作権は、株式会社大阪取引所にあります。

本資料の一部又は全部を無断で転用、複製することはできません。

本資料の内容は、株式会社大阪取引所の意見・見解を示すものではありません。

本資料は、デリバティブ商品の取引の勧誘を目的としたものではありません。