

日経平均 VI 先物のハミルトニアン・モンテカルロ法 によるベイズ時系列分析 (第 1 回)

日本大学経済学部 戸塚英臣

日本大学経済学部 三井秀俊

1. はじめに

本稿では、日経平均 VI 先物の時系列の統計的特性に関して検証する。日経平均 VI 先物は、日経平均ボラティリティー・インデックス (以下、日経平均 VI) を対象とする先物取引であり、ボラティリティーが高い商品とされている¹⁾。そのため、特に日経平均 VI 先物のボラティリティーに焦点を当て実証的な分析を行なう。また、日経 225 先物等とは異なり原資産が伝統的資産ではなくボラティリティーであるため、通常のファイナンス時系列分析で用いられるモデルにより分析できるかどうかを確認する。実証分析に際しては、ボラティリティーが確率的に変動する確率的ボラティリティー変動 (Stochastic Volatility; 以下、SV) モデルとレバレッジ効果を考慮した SV (SV with Leverage; 以下、SVL) モデル²⁾ を用いて、ハミルトニアン・モンテカルロ (Hamiltonian Monte Carlo; 以下、HMC) 法³⁾ によるベイズ推定を行なう⁴⁾。また、リスク資産収益率の分布は正規分布よりも両裾が厚い分布であることが知られているため、本稿では誤差項の分布に関して、正規分布だけでなく t 分布も用いることにする。第 1 回では、SV モデル・SVL モデル、HMC 法によるベイズ推定、実証分析に使用した日経平均 VI 先物のデータに関して解説する。

2. 分析モデル

2.1 SV モデルと SVL モデル

ファイナンスの時系列分析で通常利用される SV モデルは、収益率 y_t とボラティリティー $\sigma_t^2 = \exp(h_t/2)$ の過程を $h_t = \ln \sigma_t^2$ として⁵⁾ 以下のように記述される。

$$y_t = \exp(h_t/2)u_t, \quad t = 1, \dots, n, \quad (1)$$

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t, \quad t = 0, \dots, n-1, \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim i.i.d. \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix} \right). \quad (3)$$

¹⁾日経平均 VI, 日経平均 VI 先物に関して詳しくは、國宋 (2019) を参照。

²⁾ボラティリティーに非対称性 (asymmetry) があるモデルとして、Asymmetry SV モデルと呼ばれることもある。

³⁾HMC 法に関して詳しくは、Duane *et al.* (1987), Neal (2011) を参照。

⁴⁾HMC を用いたベイズ推定による株価指数先物市場での実証分析として、戸塚・三井 (2020a), 戸塚・三井 (2020b) を参照。また、外国為替相場の分析として、戸塚・三井 (2020c) を参照。

⁵⁾ボラティリティー σ_t^2 が負にならないようにするためである。

ここで, u_t は平均 0, 分散 1, η_t は平均 0, 分散 σ_η^2 の正規分布に従う誤差項である. *i.i.d.* は, 過去と独立で同一な分布 (independent and identically distributed) を表す. h_t はボラティリティの変動を示す潜在変数となる. μ はボラティリティの平均を表し, ϕ はボラティリティのショックの持続性を表すパラメータである. 定常性の条件より, $|\phi| < 1$ と仮定する. (2) 式は, 潜在変数 h_t が 1 次の自己回帰過程に従うことを示している. 非対称な動きをモデルに与えるには (1) 式と (2) 式で u_t と η_t に対して相関関係を考えれば良い. u_t と η_t とが, 相関係数 ρ を持つとして SVL モデルを構築すると,

$$\begin{pmatrix} u_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim i.i.d. \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho\sigma_\eta \\ \rho\sigma_\eta & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix} \right) \quad (4)$$

となる. (1)–(3) 式からなるモデルは SV モデル, また (1), (2), (4) 式からなるモデルは SVL モデルとなる. 本稿では, 各々, SV_n モデル, SVLn モデルと呼ぶことにする. また, 両裾が厚い誤差分布を考えるため, t 分布に従う確率変数を導入する. このとき, 収益率とボラティリティの過程は以下のように記述される.

$$y_t = \exp(h_t/2)\sqrt{z_t}u_t, \quad t = 1, \dots, n, \quad (5)$$

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t, \quad t = 0, \dots, n-1, \quad (6)$$

$$z_t \sim i.i.d. IG \left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2} \right). \quad (7)$$

ここで, IG は逆ガンマ (Inverse Gamma) 分布を表し, 誤差項 (u_t, η_t) は (4) 式に従う. 本稿では, (3), (5)–(7) 式からなるモデルを SV_t モデルと呼び, また (4)–(7) 式からなるモデルを SVLt モデルと呼ぶことにする.

(4)–(7) 式の SVLt モデルの未知パラメータ ($\phi, \sigma_\eta, \rho, \mu, \nu$) をまとめて θ で表すと, SVLt モデルの尤度関数は次のように表される⁶⁾.

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \int \cdots \int f(\mathbf{y}|\mathbf{h}, \mathbf{z}) f(\mathbf{h}|\mathbf{z}, \theta) f(\mathbf{z}|\theta) d\mathbf{h} d\mathbf{z} \\ &= \int \cdots \int \prod_{t=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi z_t} \exp(h_t)} \exp \left[-\frac{y_t^2}{2z_t \exp(h_t)} \right] \\ &\quad \times \prod_{t=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2} \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[-\frac{\{h_{t+1} - \mu - \phi(h_t - \mu) - \rho\sigma_\eta y_t \exp(-h_t/2)/\sqrt{z_t}\}^2}{2\sigma_\eta^2(1-\rho^2)} \right] \\ &\quad \times \frac{\sqrt{1-\phi^2}}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2}} \exp \left[-\frac{(1-\phi^2)(h_1 - \mu)^2}{2\sigma_\eta^2} \right] \\ &\quad \times \prod_{t=1}^n \frac{(\nu/2)^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma(\nu/2)} z_t^{-(\nu/2+1)} \exp \left(-\frac{\nu}{2z_t} \right) dh_1 \cdots dh_n dz_1 \cdots dz_n. \end{aligned} \quad (8)$$

この積分が解析的に解けないため, SVLt モデルのパラメータは最尤推定することが難しく, 本稿では HMC 法によるベイズ推定を用いて SVLt モデルのパラメータ推定を行なう.

⁶⁾SVLn モデルの尤度関数については, 戸塚・三井 (2020a) を参照.

本稿で使用する 4 つのモデルを纏めると以下ようになる。

1. SVn モデル: レバレッジ効果はなし. 誤差は正規分布に従う.
2. SVLn モデル: レバレッジ効果はあり (非対称性がある). 誤差は正規分布に従う.
3. SVt モデル: レバレッジ効果はなし. 誤差は t 分布に従う.
4. SVLt モデル: レバレッジ効果はあり. 誤差は t 分布に従う.

2.2 HMC 法によるベイズ推定

n 個のデータ $\mathbf{y} = \{y_t\}_{t=1}^n$ が与えられた場合, モデルのパラメータ $\boldsymbol{\theta} = (\phi, \sigma_\eta, \rho, \mu, \nu)$, 潜在変数 $\mathbf{h} = \{h_t\}_{t=1}^n$, $\mathbf{z} = \{z_t\}_{t=1}^n$ のベイズ推定は, 以下の式に基づいて行なわれる.

$$f(\mathbf{h}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) = \frac{f(\mathbf{y}|\mathbf{h}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta})f(\mathbf{h})f(\mathbf{z})f(\boldsymbol{\theta})}{Z}. \quad (9)$$

ここで, $f(\mathbf{h}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ と $f(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$ は事後確率密度関数と尤度関数であり, $f(\mathbf{h})$, $f(\mathbf{z})$, $f(\boldsymbol{\theta})$ はそれぞれ \mathbf{h} , \mathbf{z} , $\boldsymbol{\theta}$ の事前確率密度関数である. また, Z は規格化因子を表し,

$$Z = \int f(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})f(\mathbf{h})f(\mathbf{z})f(\boldsymbol{\theta})d\mathbf{h}d\mathbf{z}d\boldsymbol{\theta} \quad (10)$$

と定義され, 周辺尤度とも呼ばれる. 事前確率密度関数は過去のデータの情報を基に設定されるが, 過去のデータの情報が無い場合は, 事前分布の情報が無いことを表す無情報事前分布が用いられる.

\mathbf{h} , \mathbf{z} , $\boldsymbol{\theta}$ の共役運動量と呼ばれる $\mathbf{p}_h = \{p_{ht}\}_{t=1}^n$, $\mathbf{p}_z = \{p_{zt}\}_{t=1}^n$, \mathbf{p}_θ を導入する. これら共役運動量の標準正規分布,

$$f(\mathbf{p}_h)f(\mathbf{p}_z)f(\mathbf{p}_\theta) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \exp\left(-\frac{\mathbf{p}_h^2}{2} - \frac{\mathbf{p}_z^2}{2} - \frac{\mathbf{p}_\theta^2}{2}\right) \quad (11)$$

と事後確率密度分布 $f(\mathbf{h}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ の同時分布は,

$$f(\mathbf{h}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{p}_h, \mathbf{p}_z, \mathbf{p}_\theta|\mathbf{y}) = f(\mathbf{h}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})f(\mathbf{p}_h)f(\mathbf{p}_z)f(\mathbf{p}_\theta) \quad (12)$$

で与えられる. HMC 法はこの同時分布から乱数を生成する. (12) 式より,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{h}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{p}_h, \mathbf{p}_z, \mathbf{p}_\theta|\mathbf{y}) &\propto \exp\left[-\frac{\mathbf{p}_h^2}{2} - \frac{\mathbf{p}_z^2}{2} - \frac{\mathbf{p}_\theta^2}{2} + \log f(\mathbf{y}|\mathbf{h}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta})\right] \\ &= \exp[-H(\mathbf{h}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{p}_h, \mathbf{p}_z, \mathbf{p}_\theta)] \end{aligned} \quad (13)$$

となる. ここで,

$$H(\mathbf{h}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{p}_h, \mathbf{p}_z, \mathbf{p}_\theta) = \frac{\mathbf{p}_h^2}{2} + \frac{\mathbf{p}_z^2}{2} + \frac{\mathbf{p}_\theta^2}{2} - \log f(\mathbf{y}|\mathbf{h}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}) \quad (14)$$

と定義し、これをハミルトニアンと呼ぶ。 \mathbf{h} , \mathbf{z} , $\boldsymbol{\theta}$ とそれらの共役運動量 \mathbf{p}_h , \mathbf{p}_z , \mathbf{p}_θ は、次のハミルトンの運動方程式に従う。なお、 τ は仮想的な時間を表す。

$$\frac{d\boldsymbol{\theta}}{d\tau} = \frac{\partial H(\mathbf{h}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{p}_h, \mathbf{p}_z, \mathbf{p}_\theta)}{\partial \mathbf{p}_\theta} = \mathbf{p}_\theta, \quad (15)$$

$$\frac{d\mathbf{p}_\theta}{d\tau} = -\frac{\partial H(\mathbf{h}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{p}_h, \mathbf{p}_z, \mathbf{p}_\theta)}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \log f(\mathbf{y}|\mathbf{h}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}). \quad (16)$$

ここでは、 $\boldsymbol{\theta}$ についてのハミルトンの運動方程式のみを示す。(15)–(16) 式は解析的には解けないので、リープフロッグ (leapfrog) 法のような時間反転や体積保存を満足する数値積分法を用いて解くことで乱数を生成し、メトロポリス法を利用してベイズ推定を行なう。

3. データ

日経平均 VI 先物のデータは、Bloomberg から取得した。データの観測期間は、2015年1月5日から2019年12月30日までである。収益率 y_t は、 t 時点の日経平均 VI 先物の終値を S_t とするとき、 $y_t = (\ln S_t - \ln S_{t-1}) \times 100$ (%) として計算を行なった。日経平均 VI 先物の日次収益率の観測期間は、2015年1月6日から2019年12月30日までであり、観測個数は1,221である。日経平均 VI 先物と収益率のグラフを図1に示す。データの要約統計量は、表1に纏められている。

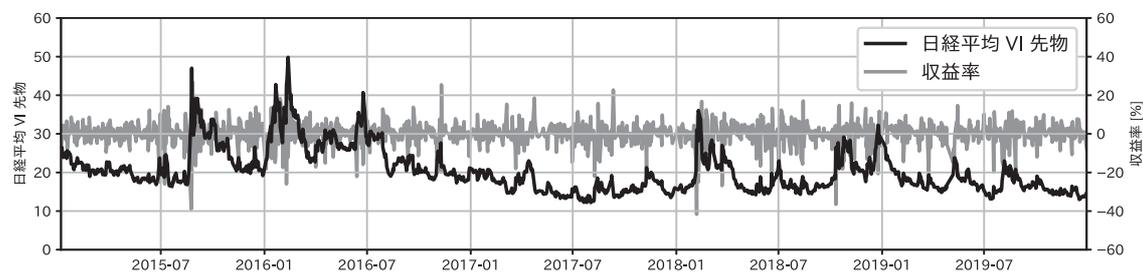


図 1: 日経平均 VI 先物と収益率のグラフ

表 1: 日経平均 VI 先物 の日次収益率の要約統計量

2015/1/6 – 2019/12/30

観測個数	平均	標準偏差	歪度	超過尖度	最大値	最小値
1,221	0.0434	6.5600	-0.9891	4.8586	26.9902	-41.6649

日経平均 VI 先物の収益率の歪度については負の値となっており、左に歪んだ分布に従っている。また、超過尖度については、0 を超えていることから、正規分布よりも裾が厚いことがわかる。したがって、日経平均 VI 先物の収益率は、正規分布よりも裾が厚く、左に歪んだ分布に従っていることがわかる。ここで、図 2 に日経平均 VI 先物の収益率の自己相

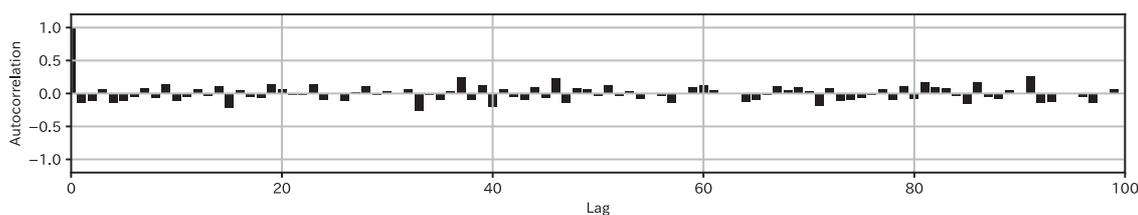


図 2: 日経平均 VI 先物の収益率の ACF

関関数 (Autocorrelation function; 以下, ACF) を示す. 図 2 より, 日経平均 VI 先物の収益率の自己相関は, ラグ 0 以外ではほぼ 0 であることが分かる. これより, 収益率は独立, もしくは無相関である徴候を表している.

4. まとめ

本稿では, 本研究の分析モデルである SV モデルと SVL モデルを説明し, HMC 法によるベイズ推定について解説を行なった. また, 実証分析で使用する日経平均 VI 先物のデータを示した. 来月号では, 日経平均 VI 先物を用いた実証結果について報告する予定である.

参考文献

- [1] 國宋利広 (2019), 『日経平均 VI 入門』, 中央経済社.
- [2] 戸塚英臣・三井秀俊 (2020a), 「ハミルトニアン・モンテカルロ法による非対称 SV モデルの推定—日経 225 先物, TOPIX 先物— (第 1 回)」, 日本取引所グループ『先物・オプションレポート』, Vol. 32, No.2, pp. 1-6.
- [3] 戸塚英臣・三井秀俊 (2020b), 「ハミルトニアン・モンテカルロ法による非対称 SV モデルの推定—日経 225 先物, TOPIX 先物— (第 2 回)」, 日本取引所グループ『先物・オプションレポート』, Vol. 32, No.3, pp. 1-8.
- [4] 戸塚英臣・三井秀俊 (2020c), 「ハミルトニアン・モンテカルロ法を用いた Stochastic Volatility モデルのベイズ推定による外国為替相場の分析」, 日本証券経済研究所『証券経済研究』, 第 112 号, 掲載予定.
- [5] Duane, S., Kennedy, A. D., Pendleton, B. J. and Roweth, D. (1987), “Hybrid Monte Carlo,” *Physics Letters B*, Vol.195, No.2, pp. 216-222.
- [6] Neal, R. M. (2011), “MCMC Using Hamiltonian Dynamics,” in Brooks, S., Gelman, A., Jones, G. L. and Meng, X. - L. eds., *Handbook of Markov Chain Monte Carlo*, pp. 113-162, Chapman & Hall.

本資料に関する著作権は, 株式会社大阪取引所にあります.

本資料の一部又は全部を無断で転用, 複製することはできません.

本資料の内容は, 株式会社大阪取引所の意見・見解を示すものではありません.

本資料は, デリバティブ商品の取引の勧誘を目的としたものではありません.