先物・オプションレポート 2021 年 2 月号

新型コロナウイルス禍での日経平均株価の
ボラティリティと分散リスクプレミアム (1)

一橋大学経済研究所教授 渡部敏明

1　はじめに

図 1 は日本で初めて新型コロナウイルス陽性者が報告された 2020 年 1 月 16 日から 2021 年 2 月 16 日までの日本全国の PCR 検査陽性者数 [1] と日経平均株価終値の推移を表している。日経平均株価終値は 2020 年 3 月 19 日に 16552.83 円まで下がった後, PCR 検査陽性者数が増加する中でも堅調に推移し, 2021 年 2 月 15 日には 30,000 円を超えた。

本稿では, 日経平均株価のボラティリティや分散リスクプレミアムを計算し, 新型コロナウイルス禍において, それらがどうのように推移したのかを分析する。資産価格のボラティリティには, オプション価格から計算される危険中立測度 (risk-neutral measure) Q の下でのボラティリティと過去の市場価格から計算される実測度 (physical measure) P の下でのボラティリティがある。それらの差は分散リスクプレミアムと呼ばれ, 米国や欧州では原資産の超過リターンに対して, 日本では景気に対して予測力を持つことが明らかになっている。本号では, これら 2 つのボラティリティと分散リスクプレミアムの計算方法について説明する。次号で計算結果を紹介し, それぞれ新型コロナウイルス禍でどのように推移したかを概観する。

2　危険中立測度の下でのボラティリティ

危険中立測度 Q の下でのボラティリティはオプション価格からインプライド・ボラティリティとして計算される。古くはインプライド・ボラティリティの計算にブラック・ショールズ・モデルを用いていた。しかし, このモデルではボラティリティをオプションの満期まで一定と仮定するので, 近年ではこのモデルを用いず, 以下で説明するように, ボラティリティの変動を許容してインプライド・ボラティリティを計算することが多い。例えば, VIX や日経平均 VI はそれぞれ S&P500 オプションと日経平均オプションの価格からこの方法で計算したインプライド・ボラティリティである。

資産価格の対数値 $p(t)$ が, 以下のジャンプ拡散過程に従っているとする。

$$dp(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t) + \kappa(t)dN(t). \tag{1}$$

*本研究は一橋大学社会科学高等研究院および科学研究費基盤研究 (A) 20H00073, 19H00588, 17H00985 より助成を受けている。

[1] 厚生労働省オープンデータよりダウンロードした。

ここで, $\mu(t)$ はドリフト, $\sigma(t)$ は瞬時的ボラティリティ, $W(t)$ はブラウン運動, $\kappa(t)$ はジャンプの大きさ, $N(t)$ は数え上げ測度 (counting measure) を表す。$\mu(t)$, $\sigma(t)$, $\kappa(t)$ に t が付いているので, それらが時間を通じて変動することを許容している。

この下で, 現時点 0 からオプションの残存期間 τ までの Q の下でのボラティリティは以下の式で表せる [2]。

$$E_0^Q\left[\int_0^\tau (dp(t))^2\,dt\right] = 2\exp(r\tau)\left[\int_0^F \frac{P(\tau,K)}{K^2}dK + \int_F^\infty \frac{C(\tau,K)}{K^2}dK\right]. \tag{2}$$

ここで, r は安全資産の連続複利, K は権利行使価格, τ はオプションの残存期間, P は現時点のプット・オプションの価格, C は現時点のコール・オプションの価格, また, $S(=\exp(p(0))$ を 現時点の原資産価格とすると, $F=\exp(r\tau)S$ である。

しかし, 右辺の積分は解析的に解けないので, 総和で近似する必要がある。VIX や日経平均 VI では市場で取引されている権利行使価格の異なるアウト・オブ・ザ・マネーのオプション価格だけを用いて総和を行っているが, 市場で取引されている権利行使価格の異なるオプションの数は多くないので, Jiang and Tian (2005, 2007) は, この方法では近似誤差が無視できないことを示している。Jiang and Tiang (2005) は, ボラティリティ・サーフェスを用いて市場で取引されていないオプション価格を導出し, それらも用いて総和を取ることにより、近似精度を高める方法を提案している。日経平均株価のインプライド・ボラティリティに関しては, 同様の方法で, 大阪大学数理・データ科学教育研究センターが Volatility Index Japan (VXJ) を算出しているので [3], 本稿ではそれを用いる。VXJ では, VIX や日経平均 VI と同様, τ を 1 か月としている。また, VXJ は, これも VIX や日経平均 VI と同様, (2) 式から計算される値を年利換算し平方根を取っているので, Q の下でのボラティリティには, 月利換算して 2 乗した $(\mathrm{VXJ}/12)^2$ を用いる。

3 実測度の下でのボラティリティ

実測度 P の下でのボラティリティは過去の原資産価格を用いて推定される。古くは日次リターンを用いて GARCH モデルや Stochastic Volatility (SV) モデルから推定していたが [4], 近年では日中の高頻度の価格を用いて Realized Volatility (RV) を計算し, その変動をモデル化することで推定することが多い。以下, t を第 t 日の市場が閉まる時点とし, $t-1$ 時点から t 時点までに日中価格 $\left\{p_{t-1}, p_{t-1+1/n}, \ldots, p_t\right\}$ が観測されるものとする。本稿では, 第 t 日の RV を以下のように計算する。

$$\mathrm{RV}_t = 22\sum_{i=1}^{n}\left[100\left(\ln p_{t-1+i/n} - \ln p_{t-1+(i-1)/n}\right)\right]^2. \tag{3}$$

ここで, ln は自然対数を表し, 22 を掛けているのは月利換算するためである。

[2] 証明については, 杉原 (2010) を参照されたい。
[3] VXJ について詳しくは, Fukasawa et al. (2011) を参照されたい。
[4] GARCH モデルや SV モデルについては, 渡部 (2000) を参照されたい。

資産価格の対数値 $p(t)$ がジャンプ拡散過程 (1) 式に従っているなら, $n \to \infty$ とすると, RV は以下のものに確率収束する。

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \mathrm{RV}_t = \int_{t-1}^{t} \sigma^2(s)ds + \sum_{t-1<s\leq t} \kappa^2(s)ds. \tag{4}$$

ここで, 右辺第 1 項は Integrated Volatility もしくは連続成分 (Continuous Component), 第 2 項はジャンプ成分 (Jump Component) と呼ばれる。以下, それらの推定値をそれぞれ C_t, J_t と表す。

しかし, 資産価格にはマイクロストラクチャー・ノイズと呼ばれるノイズが加わるため[5], n を大きくすればするほど, 価格の変動に占めるマイクロストラクチャー・ノイズによる変動の割合が大きくなる。そこで, n を大きくし過ぎると, RV はマイクロストラクチャー・ノイズによる変動ばかり捉えてしまう。RV からマイクロストラクチャー・ノイズによるバイアスを除去する方法がいくつか提案されているが[6], Liu et al. (2015) がそうした方法を用いても 5 分ごとのリターンの 2 乗和として計算した単純な RV にボラティリティのサンプル内でのフィットや予測精度で勝てないとの結果を様々な資産について示している。そこで, 本稿では RV を 5 分ごとのリターンの 2 乗和として計算する。ただし, 後場の終値から翌日の前場の始値までの夜間のリターンと前場の終値から後場の始値までの昼休みのリターンの 2 乗は, 時間間隔が長いので加えずに RV を計算し, それを以下の Hansen and Lunde (2015a) の方法によって夜間と昼休みを含む 24 時間の RV に変換する[7]。

$$\mathrm{RV}_t = c\mathrm{RV}_t^{(o)}, \quad c = \frac{\sum_{t=1}^{T}(R_t - \bar{R})^2}{\sum_{t=1}^{T}\mathrm{RV}_t^{(o)}}. \tag{5}$$

ここで, $\mathrm{RV}_t^{(o)}$ は夜間と昼休みのリターンの 2 乗を加えないで計算した RV, R_t は日次リターン, $\bar{R}$ はその標本平均を表す。このように計算すると, RV の標本平均が日次リターンの標本分散に等しくなる。

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathrm{RV}_t = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(R_t - \bar{R})^2$$

RV の変動を表すのに最も良く用いられるのは, Corsi (2009) で提案された以下の Heterogeneous Autoregressive (HAR) モデルである[8]。

$$\ln \mathrm{RV}_t = c + \beta_d \ln \mathrm{RV}_{t-1} + \beta_w \ln \mathrm{RV}_{t-5:t-1} + \beta_m \ln \mathrm{RV}_{t-22:t-1} + \epsilon_t. \tag{6}$$

[5]マイクロストラクチャー・ノイズについて詳しくは, Campbell et al. (1997) を参照されたい。
[6]Ubukata and Watanabe (2014a), Liu et al. (2015), 生方・渡部 (2011) を参照されたい。
[7]他の方法に, Hansen and Lunde (2015b) がある。
[8]HAR モデルについて詳しくは, 渡部 (2020) を参照されたい。

ここで,

$$\mathrm{RV}_{t-5:t-1} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\mathrm{RV}_{t-i}, \quad \mathrm{RV}_{t-22:t-1} = \frac{1}{22}\sum_{i=1}^{22}\mathrm{RV}_{t-i},$$

であり, それぞれ過去の週次と月次の RV を表す。

RV は長期記憶性を持つ可能性が指摘されており [9], このモデルは長期記憶モデルではないが, 長期記憶過程をうまく近似でき, またボラティリティの予測精度が高いことが知られている [10]。VXJ が Q の下での月次ボラティリティなので, P の下でのボラティリティも月次ボラティリティの予測値を計算する。その場合, 被説明変数を月次 RV とした以下のモデルを用いる。

$$\ln \mathrm{RV}_{t-21:t} = c + \beta_d \ln \mathrm{RV}_{t-1} + \beta_w \ln \mathrm{RV}_{t-5:t-1} + \beta_m \ln \mathrm{RV}_{t-22:t-1} + \epsilon_t. \tag{7}$$

HAR モデルにはいくつかの改良が加えられており, 本稿では, Bekaert and Hoerova (2014) の以下のモデルを用いる。

$$\begin{aligned} &\ln \mathrm{RV}_{t-21:t} \\ &= c + \alpha \ln(\mathrm{VXJ}_{t-22}/12)^2 + \beta_d \log \mathrm{C}_{t-1} + \beta_w \ln \mathrm{C}_{t-5:t-1} + \beta_m \ln \mathrm{C}_{t-22:t-1} \\ &\quad + \gamma_d \ln(1+\mathrm{J}_{t-1}) + \gamma_w \ln(1+\mathrm{J}_{t-5:t-1}) + \gamma_m \ln(1+\mathrm{J}_{t-22:t-1}) + \delta R^-_{t-1} + \epsilon_t. \end{aligned} \tag{8}$$

ここで, C_t と J_t はそれぞれ (4) 式右辺の第 1 項と第 2 項の推定値を表し,

$$\mathrm{C}_{t-5:t-1} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\mathrm{C}_{t-i}, \quad \mathrm{C}_{t-22:t-1} = \frac{1}{22}\sum_{i=1}^{22}\mathrm{C}_{t-i},$$
$$\mathrm{J}_{t-5:t-1} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\mathrm{J}_{t-i}, \quad \mathrm{J}_{t-22:t-1} = \frac{1}{22}\sum_{i=1}^{22}\mathrm{J}_{t-i},$$

である。また, $R^-_{t-1} = \mathrm{Min}\,[R_{t-1}, 0]$ である。(4) 式の連続成分はジャンプ成分よりも持続性が高いので, Andersen et al. (2007) は HAR モデルの説明変数を RV_{t-1}, $\mathrm{RV}_{t-5:t-1}$, $\mathrm{RV}_{t-22:t-1}$ ではなく, C_{t-1}, $\mathrm{C}_{t-5:t-1}$, $\mathrm{C}_{t-22:t-1}$, J_{t-1}, $\mathrm{J}_{t-5:t-1}$, $\mathrm{J}_{t-22:t-1}$ にした HAR-CJ モデルを提案した。(8) 式は, それに $\ln(\mathrm{VXJ}_{t-22}/12)^2$ と R^-_{t-1} を説明変数として加えている。株価指数では価格が下がった日の翌日にボラティリティがより上昇する傾向があることが知られており, R^-_{t-1} を加えるのは, このボラティリティ変動の非対称性を捉えるためであり, $\delta < 0$ であればこの現象と整合的である。RV_t を CV_t と J_t に分割する方法はいくつか提案されているが, 本稿では Barndorff-Nielsen and Shephard (2004, 2006) の方法を用いる [11]。

[9] 長期記憶性については, Beran (1994), 矢島 (2003), 田中 (2006 第 7 章) 等を参照されたい。

[10] HAR モデルと他のモデルのボラティリティの予測精度の比較については, 渡部 (2007), Takahashi et al. (2021) を参照されたい。

[11] この方法について詳しくは, 渡部 (2020) を参照されたい。

t 時点における P の下での月次ボラティリティは, $E_t^P[\mathrm{RV}_{t+1:t+22}]$ として推定される。そこで, まず, (8) 式のパラメータを最小 2 乗法によって推定し, それを用いて $E_t^P[\ln RV_{t+1:t+22}]$ を計算する。さらに, ϵ_t の分布を正規分布と仮定し, $E_t^P[\ln \mathrm{RV}_{t+1:t+22}]$ と残差分散 $\hat{\sigma}_\epsilon^2$ を用いて, $E_t^P[\mathrm{RV}_{t+1:t+22}]$ を以下のように計算する。

$$E_t^P[\mathrm{RV}_{t+1:t+22}] = \exp\left[E_t^P[\ln \mathrm{RV}_{t+1:t+22}] + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_\epsilon^2\right]. \tag{9}$$

4　分散リスクプレミアム

分散リスクプレミアムは Q の下でのボラティリティと P の下でのボラティリティの差として以下のように計算される。

$$\mathrm{VRP}_t = (\mathrm{VXJ}_t/12)^2 - E_t^P[\mathrm{RV}_{t+1:t+22}]. \tag{10}$$

Bollerslev et al. (2009) は分散リスクプレミアムが将来の原資産の超過リターンに対して予測力を持つことを理論的に示している。また, Bollerslev et al. (2009) と Bekaert and Hoerova (2014) ではアメリカについて, Bollerslev et al (2014) はアメリカ, フランス, ドイツ, 日本, スイス, オランダ, ベルギー, イギリスについて実証分析を行い, 日本以外では分散リスクプレミアムが将来の原資産の超過リターンに対して予測力を持つことを示している。Ubukata and Watanabe (2014b), 渡部 (2016) も日本の分散リスクプレミアムが将来の原資産の超過リターンに対して予測力を持たないことを示している。大屋 (2011), Ubukata and Watanabe (2014b), 渡部 (2016) では, 日経平均株価の分散リスクプレミアムが将来の景気に対して予測力を持つことを示しているが, Bekaert and Hoerova (2014) では米国の景気に対して予測力を持つのは分散リスクプレミアムではなく, P の下でのボラティリティであることを示している。日本の分散リスクプレミアムの予測力に関して, 米国や欧州の国々と異なる結果が得られる原因についてはまだ明らかになっていない [12]。

参考文献

Andersen, T. G., Bollerslev, T. and Diebold, F. X. (2007), "Roughing it up: Including Jump Components in the Measurement, Modeling, and Forecasting of Return Volatility," *Review of Economics and Statistics*, 89(4), 701–720.

Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2004), "Power and Bipower Variation with Stochastic Volatility and Jumps (with discussion)," *Journal of Financial Econometrics*, 2(1), 1–37.

[12] Ogawa et al. (2020) は, 日経平均株価の分散リスクプレミアムが将来の原資産の超過リターンに対して予測力を持たない原因が長期に渡るゼロ金利政策にあるとしている。

Barndorff-Nielsen O. E. and Shephard, N. (2006), "Econometrics of Testing for Jumps in Financial Economics Using Bipower Variation," *Journal of Financial Econometrics*, 4(1), 1–30.

Bekaert, G. and Hoerova, M. (2014), "The VIX, the Variance Premium and Stock Market Volatility," *Journal of Econometrics*, 183(2), 181–192.

Beran, J. (1994), *Statistics for long-memory processes*, Chapman & Hall.

Bollerslev, T., Marrone, J., Xu, L. and Zhou, H. (2014), "Stock Return Predictability and Variance Risk Premia: Statistical Inference and International Evidence," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 49(3), 633–611.

Bollerslev, T., Tauchen, G. and Zhou, H. (2009), "Expected Stock Returns and Variance Risk Premia," *Review of Financial Studies*, 22(11), 4463–4492.

Campbell, J. Y., Lo, A. W. and Mackinlay, A. C. (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton: Princeton University Press. (祝迫得夫・大橋和彦・中村信弘・本田俊毅・和田賢治訳 (2003)『ファイナンスのための計量分析』共立出版.)

Corsi, F. (2009) "A Simple Approximate Long-Memory Model of Realized Volatility," *Journal of Financial Econometrics*, 7(2), 174–196.

Fukasawa, M., Ishida, I., Maghrebi, N., Oya, K., Ubukata, M. and Yamazaki，K. (2011), "Model-free Implied Volatility: From Surface to Index," *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 14(4), 433–463.

Hansen, P. R. and Lunde, A. (2005a), "A Forecast Comparison of Volatility Models: Does Anything Beat a GARCH(1,1)?" *Journal of Applied Econometrics*, 20(7), 873–889.

Hansen, P. R. and Lunde, A. (2005b), "A Realized Variance for the Whole Day Based on Intermittent High-frequency Data," *Journal of Financial Econometrics*, 3(4), 525–554.

Jiang, G. J. and Tian, Y. S. (2005), "Model-free Implied Volatility and Its Information Content," *Review of Financial Studies*, 18(4), 1305–1342.

Jiang, G. J. and Tian, Y. S. (2007), "Extracting Model-Free Volatility from Option Prices: An Examination of the VIX Index," *Journal of Derivatives*, 14(3), 35–60.

Liu, L. Y., Patton, A. J. and Sheppard, K. (2015), "Does Anything Beat 5-minute RV? A Comparison of Realized Measures across Multiple Asset Classes," *Journal of Econometrics*, 187(1), 293–311.

Ogawa, T., Ubukata, M. and Watanabe, T. (2020), "Stock Return Predictability and Variance Risk Premia around the ZLB," IMES Discussion Paper 2020-E-9/Finance, Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan.

Takahashi, M., Watanabe, T. and Omori, Y. (2021), "Forecasting Daily Volatility of Stock Price Index Using Daily Returns and Realized Volatility," HIAS Discussion Paper HIAS-E-104, Hitotsubashi Institute for Advanced Study, Hitotsubashi University.

Ubukata, M. and Watanabe, T. (2014a), "Option Pricing Using Realized Volatility and ARCH Type Models," *Japanese Economic Review*, 65(4), 431–467.

Ubukata, M. and Watanabe, T. (2014b), "Market Variance Risk Premiums in Japan for Asset Predictability," *Empirical Economics*, 47(1), 169–198.

生方雅人・渡部敏明 (2011)「実現ボラティリティ–ボラティリティの計測方法とリスクマネジメントへの応用可能性–」『証券アナリストジャーナル』49(8), 16–25.

大屋幸輔 (2011)「ボラティリティの景気予測力–バリアンス・リスクプレミアムの検証から」浅子和美・飯塚信夫・宮川努編『世界同時不況と景気循環分析』第 7 章, 141–157, 東京大学出版会.

杉原慶彦 (2010)「わが国株式市場のモデル・フリー・インプライド・ボラティリティ」『金融研究』29(2), 73–120.

田中勝人 (2006)『現代時系列分析』岩波書店.

矢島美寛 (2003)「長期記憶をもつ時系列モデル」刈屋武昭・矢島美寛・田中勝人・竹内啓著『経済時系列の統計 その数理的基礎』第 II 部, 103–202, 岩波書店.

渡部敏明 (2000)『ボラティリティ変動モデル』朝倉書店.

渡部敏明 (2007)「Realized Volatility: サーベイと日本の株式市場への応用」『経済研究』58(4), 352–373.

渡部敏明 (2016)「日経 225 分散リスク・プレミアムの予測力」日本取引所『先物・オプションレポート』28(11), 全 6 頁.

渡部敏明 (2020)「Heterogeneous Autoregressive モデル–サーベイと日経 225 株価指数の実現ボラティリティへの応用–」『広島経済大学経済研究論集』42(3), 5–18.

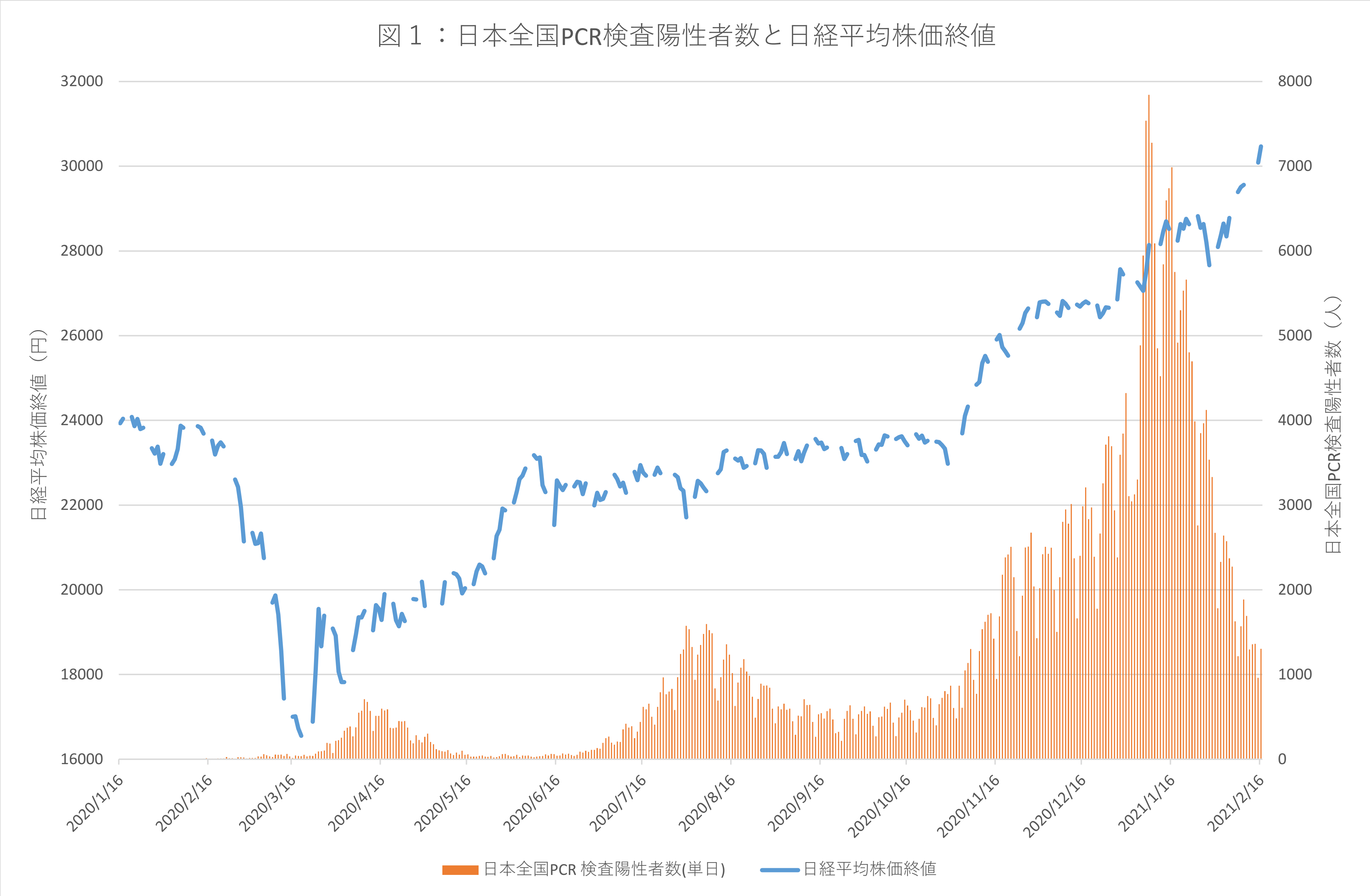

図１：日本全国PCR検査陽性者数と日経平均株価終値
日経平均株価終値（円）
日本全国PCR検査陽性者数（人）
32000
30000
28000
26000
24000
22000
20000
18000
16000
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
2020/1/16
2020/2/16
2020/3/16
2020/4/16
2020/5/16
2020/6/16
2020/7/16
2020/8/16
2020/9/16
2020/10/16
2020/11/16
2020/12/16
2021/1/16
2021/2/16
日本全国PCR 検査陽性者数(単日)
日経平均株価終値