日経平均先物と TOPIX 先物のハミルトニアン・モンテカルロ法による安定分布のベイズ推定（第 1 回）

日本大学経済学部　戸塚英臣
日本大学経済学部　三井秀俊

1. はじめに

安定分布 (stable distribution) [1] は, 分布の歪みと両裾が厚い[2] という優れた 2 つの特性を持つことから, 経済学, 物理学, 生物学等の様々な広い分野に応用されている. これまで, 安定分布を株式市場に適用した研究は数多く行なわれてきた. 安定分布の確率密度関数のパラメータ推定として, 確率密度関数のスケーリング不偏性を用いた推定, データに対してエルゴード性を仮定した推定, 安定分布をポアソン級数展開で近似したベイズ推定等が行なわれてきた. しかし, マルコフ連鎖モンテカルロ法 (Markov Chain Monte Carlo; 以下, MCMC) に基づくベイズ推定による研究は十分に行なわれているとは言い難い. そこで, 本稿では, ハミルトニアン・モンテカルロ (Hamiltonian Monte Carlo; 以下, HMC) 法[3]を用いたベイズ推定により, 日経平均先物と TOPIX 先物の安定分布の確率密度関数のパラメータ推定を行なうことにする. 第 1 回では, 安定分布, 安定分布の数値積分, HMC 法によるベイズ推定に関して解説を行なう.

2. 安定分布と数値積分

2.1 安定分布

安定分布の確率密度関数 $f\left(x|\alpha,\beta,\gamma,\delta\right)$ は解析的に求めることができず, 特性関数 $\psi\left(t|\alpha,\beta,\gamma,\delta\right)$ の Fourier 変換を用いて,

$$f\left(x|\alpha,\beta,\gamma,\delta\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi\left(t|\alpha,\beta,\gamma,\delta\right)e^{-ixt}dt \tag{1}$$

と定義される. ここで, 特性関数は,

$$\psi\left(t|\alpha,\beta,\gamma,\delta\right)=\exp\left[it\delta-|\gamma t|^{\alpha}\left(1-i\beta\mathrm{sgn}(t)\Phi(t,\alpha,\gamma)\right)\right] \tag{2}$$

で与えられ, Φ は,

$$\Phi(t,\alpha,\gamma)=\begin{cases}\left(|\gamma t|^{1-\alpha}-1\right)\tan\left(\dfrac{\pi\alpha}{2}\right) & \alpha\neq 1\\ -\dfrac{2}{\pi}\log|\gamma t| & \alpha=1\end{cases} \tag{3}$$

---

[1] 安定パレート・レビ, または, 安定パレートと呼ばれることもある. 正規分布, Cauchy 分布, Bernoulli 分布, Lévy 分布は, 安定分布の特別なクラスに属する分布である.

[2] 正規分布以外の安定分布は, 正規分布より裾が厚くなる.

[3] 詳しくは, MacKay (2003, Chapter 30), Neal (1994, 2011), 豊田 [編著] (2015), 花田・松浦 (2020, Chapter 6) を参照.

である. 安定分布は, 特性関数の 4 つのパラメータ $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ で特徴づけられる. α は, 特性指数 (stability parameter) と呼ばれ, $0<\alpha\le 2$ の範囲の値をとり, 安定分布の裾の厚さを表すパラメータである. β は, 歪度指数 (skewness paramter) と呼ばれ, $-1\le\beta\le 1$ の範囲の値をとり, 安定分布の左右対称性を表すパラメータである[4)] . γ は, 尺度指数 (scale paramter) と呼ばれ, $\gamma>0$ の範囲の値をとり, 安定分布のばらつきを表すパラメータである. δ は, 位置指数 (location paramter) と呼ばれ, $-\infty<\delta<\infty$ の範囲の値をとり, 安定分布を平行移動するパラメータである. (1) 式の一般的な解析解はないが, 特性指数と歪度指数の組み合わせにより特殊なケースとして安定分布を初等関数で表現できる.

1. 特性指数 $\alpha=2$, 歪度指数 $\beta=0$ の場合, 平均 δ, 分散 $\sigma^2=2\gamma$ の正規分布である.
2. 特性指数 $\alpha=1$, 歪度指数 $\beta=0$ の場合, 位置指数 δ, 尺度指数 γ の Cauchy 分布である.
3. 特性指数 $\alpha=0.5$, 歪度指数 $\beta=1$, 位置指数 $\delta=0$, 尺度指数 $\gamma=1$ の場合, Bernoulli 分布である.
4. 特性指数 $\alpha=0.5$, 歪度指数 $\beta=1$ の場合, 位置指数 δ, 尺度指数 γ の Lèvy 分布である.

観測されたデータを $\boldsymbol{y}=\{y_i\}_{i=1}^N$ とすると, 安定分布の確率密度関数の尤度関数は次のように表される.

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta}) &= \prod_{i=1}^{N} f\left(y_i|\alpha,\beta,\gamma,\delta\right) \\ &= \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi\left(t|\alpha,\beta,\gamma,\delta\right)e^{-iy_it}dt. \end{aligned} \tag{4}$$

ただし, $\boldsymbol{\theta}=(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ である.

2.2 安定分布の数値積分

安定分布の確率密度関数を求めるためには, Fourier 積分の数値積分を高精度で行なう必要がある. Ament and O'Neil (2018) は, 歪みの有無 ($\beta\neq 0$, もしくは $\beta=0$) で場合分けし, x と α について漸近展開を行ない, 一般化ガウス求積公式を用いて安定分布の密度関数を求める方法を提案している. しかし, この手法は, 高振動積分や減衰が遅い振動積分には有効でなく, それらの計算が必要なパラメータの範囲では安定分布の密度関数を計算できないという問題がある. そこで, 安定分布の密度関数の Fourier 積分に対して, 振動積分に対して有効な手法である二重指数関数型数値積分公式 (Double Expotential formula;

[4)] $\beta=0$ のとき, 分布は対称となる. また, $\beta>0$ のとき, 分布は右に歪んだ分布となり, $\beta<0$ のとき, 分布は左に歪んだ分布となる.

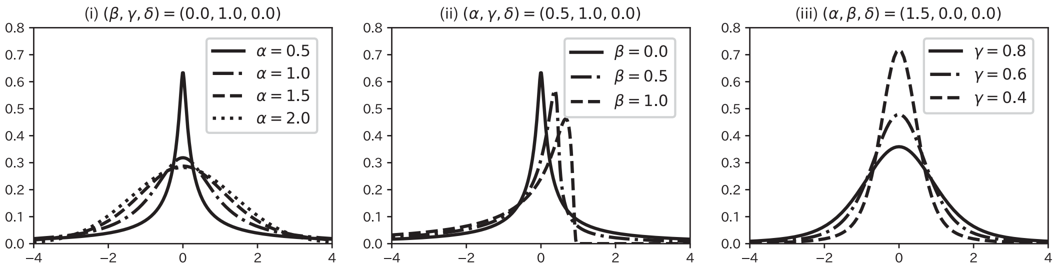

図 1: 安定分布の確率密度分布の例 (i) 歪度指数 $\beta=0$, 尺度指数 $\gamma=1.0$ に固定し, 特性指数 $\alpha=0.5,\ 1.0,\ 1.5,\ 2.0$ の場合, (ii) 特性指数 $\alpha=0.5$, 尺度指数 $\gamma=1.0$ に固定し, 歪度指数 $\beta=0.0,\ 0.5,\ 1.0$ 場合, (iii) 特性指数 $\alpha=1.5$, 特性指数 $\beta=0.0$ に固定し, 尺度指数 $\gamma=0.4,\ 0.6,\ 0.8$ 場合である. なお, 全てのグラフにおいて, 位置指数 $\delta=0.0$ である.

以下, DE 公式) を用いる[5]. $x\to\infty$ で減衰が遅い被積分関数の Fourier 積分:

$$F(\omega)=\int_0^\infty f(x)e^{i\omega x}dt \tag{5}$$

に対し, 変数変換 $x=M\psi(t)$,

$$\psi(t)=\frac{t}{1-\exp\{-2t-a(1-e^{-t})-b(e^t-1)\}} \tag{6}$$

を施すと

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^\infty f(M\varphi(t))\exp\left(i\omega M\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt \tag{7}$$

が得られる. 次に

$$E(\omega)=\int_{-\infty}^\infty f(M\varphi(t))\exp\left(i\omega M\varphi(t)-\frac{i}{2}\omega_0 M\hat{\varphi}(t)\right)\varphi'(t)dt \tag{8}$$

を定義する. ここで, $\hat{\varphi}(t)=\varphi(t)-t$ であり, ω_0 は正の定数である. 関数 $|E(\omega)|$ は大きい M に対してとても小さい値となる. (5) 式の DE 公式 $\tilde{F}(\omega)$ は, $\tilde{F}(\omega)=F(\omega)-E(\omega)$ で与えられ,

$$\begin{aligned}\tilde{F}(x)=\int_{-\infty}^\infty f(M\varphi(t))&\exp\left(i\omega M\varphi(t)-\frac{i}{2}\omega_0 M\hat{\varphi}(t)\right)\\ &\times 2iM\sin\left(\frac{1}{2}\omega_0 M\hat{\varphi}(t)\right)\varphi'(t)dt\end{aligned} \tag{9}$$

と求めることができる. Fourier 積分に対する DE 公式の積分範囲は $t\geq 0$ であるが, (1) 式の安定分布の積分範囲は $(-\infty,\infty)$ である. しかし, (2) 式の安定分布の特性関数の性質から常に $t\geq 0$ の計算に帰着でき, $x=0$ を除き条件 $x>0$ を満足している.

図 1 に, 安定分布のパラメータと左右非対称や裾の厚さの関係をみるために, いくつかのパラメータを用いて描いた安定分布を示す. 図 1 (i) は, 歪度指数 $\beta=0$, 尺度指数 $\gamma=1.0$

[5]詳しくは, Ooura (2005) を参照.

を固定し, 特性指数 $\alpha = 0.5,\ 1.0,\ 1.5,\ 2.0$ と値を変えた場合の安定分布である. 特性指数が大きくなるにつれ, 裾が厚くなり, $\alpha = 2$ で正規分布に一致する. 図 1 (ii) は, 特性指数 $\alpha = 0.5$, 尺度指数 $\gamma = 1.0$ に固定し, 歪度指数 $\beta = 0.0,\ 0.5,\ 1.0$ と値を変えた場合の安定分布である. なお, 特性指数 $\alpha = 0.5$ を選んだ理由は, Ament and O'Neil (2018) では確率密度関数の算出を断念しているパラメータ値だからである. 歪度指数が大きくなるにつれ, 分布の歪みが大きくなる. $\beta = 1.0$ で, Lévy 分布に一致する. 図 1 (iii) は, 特性指数 $\alpha = 1.5$, 歪度指数 $\beta = 0$ に固定し, 尺度指数 $\gamma = 0.4,\ 0.6,\ 0.8$ と値を変えた場合の安定分布である. 尺度指数は正規分布における標準偏差に対応するパラメータであり, 尺度指数を小さくするとばらつきが小さくなることが分かる. 図 1 から, DE 公式の有効性を確認できる.

3. HMC 法によるベイズ推定

統計モデルのパラメータを $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_j\}_{j=1}^d$, データを $\boldsymbol{y} = \{y_i\}_{i=1}^n$ とすると, ベイズ推定法における事後分布 $f(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{y})$ は,

$$f(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{y}) = \frac{f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta})f(\boldsymbol{\theta})}{\int f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta})f(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}} \tag{10}$$

と表される. ここで, $f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta})$ は尤度関数, $f(\boldsymbol{\theta})$ はパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の事前分布である. また, (10) 式の分母は, 規格化因子であり, 周辺尤度とも呼ばれる. 本稿では, 事前分布が事後分布に与える影響を小さくするため, 事前分布に無情報事前分布を用いる. (10) 式の事後分布とは独立な標準正規分布 $f(\boldsymbol{p})$ と, パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の共役運動量と呼ばれる $\boldsymbol{p} = \{p_j\}_{j=1}^d$ を導入する. この共役運動量の標準正規分布,

$$f(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\boldsymbol{p}^2}{2}\right) \tag{11}$$

と (10) 式の事後分布との同時分布 $f(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p}|\boldsymbol{y})$ は,

$$f(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p}|\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{p}) \tag{12}$$

で与えられる. HMC 法ではこの同時分布から乱数を発生させる. (12) 式より,

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p}|\boldsymbol{y}) &\propto \exp\left(-\frac{\boldsymbol{p}^2}{2} + \log f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta})\right) \\ &= \exp\left[-H(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p})\right] \end{aligned} \tag{13}$$

となる. ここで,

$$H(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{p}^2 - \log f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta}) \tag{14}$$

をハミルトニアンとして定義する. HMC 法では, パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ と共役運動量 $\boldsymbol{p}$ はハミルトンの運動方程式 (Hamilton's equation of motion) に従うと考え, リープフロッグ積分 (leapfrog integrator) を用いて数値的に解くこととなる. HMC 法によるベイズ推定に関して詳しくは, 戸塚・三井 (2021) を参照して頂きたい.

4. まとめ

本稿では, 本研究の分析モデルである安定分布, 安定分布の数値積分, HMC 法によるベイズ推定について説明した. 来月号では, 日経平均先物と TOPIX 先物を用いた実証結果について報告する予定である.

参考文献

[1] 戸塚英臣・三井秀俊 (2021), 「ハミルトニアン・モンテカルロ法におけるリープフロッグ法による非対称 SV モデルのベイズ推定への影響」, 日本大学経済学部 『経済集志』, 第 91 巻, 第 1 号, pp. 1–22.

[2] 豊田秀樹 [編著] (2015), 『基礎からのベイズ統計学 —ハミルトニアンモンテカルロ法による実践的入門—』, 朝倉書店.

[3] 花田政範・松浦壮 (2020), 『ゼロからできる MCMC マルコフ連鎖モンテカルロ法の実践的入門』, 講談社.

[4] Ament, S and O'Neil, M. (2018). "Accurate and Efficient Numerical Calculation of Stable Densities via Optimized Quadrature and Asymptotics," *Statistics and Computing,* 28(1), pp. 171–185.

[5] MacKay, D. J. C. (2003), *Information Theory, Inference, and Learning Algorithms,* Cambridge University Press.

[6] Neal, R. M. (1994), "An Improved Acceptance Procedure for the Hybrid Monte Carlo Algorithm," *Journal of Computational Physics,* 111, pp. 194-203.

[7] Neal, R. M. (2011), "MCMC Using Hamiltonian Dynamics," in Brooks, S., Gelman, A., Jones, G. L. and Meng, X. - L. eds., *Handbook of Markow Chain Monte Carlo,* pp. 113–162, Chapman & Hall.

[8] Ooura, T. (2005). "A Double Exponential Formula for the Fourier Transforms," *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, Kyoto University, 41, pp. 971–977.