# 現物株保有量を考慮した証券会社別日経 225 先物超過需要関数の導出

明海大学　経済学部
准教授　新井啓

## 1. はじめに

アベノミクスによる大幅な金融緩和策により日経平均株価は大幅に上昇したが、日経平均株価が大きく変動する場面も見られる。これは現物株取引だけでなく先物取引やオプション取引も影響していると考えられるが、現在までのところ、これを明確に経済モデルとして説明できてはいない。この点に関して岩田[1997]のモデルは 1 日の取引時間内の取引者の行動を説明する点ではすぐれている。しかし週次でしか取引者の建玉データを入手できない日経平均先物の場合には、そのままでは各証券会社の行動を説明することは不可能である。また岩田[1997]のモデルでは現物株の保有量は無視された形で計測が行われている。実需の少ない日本の商品市場ではあてはまるが、裁定取引が行われ現物株も大量に保有される日経平均先物では現物株の存在を無視することはできない。そこで本稿では上記の制約があるうえで日経平均先物の証券会社別超過需要関数を現物株の取引を含めた形で導出する。

## 2. 計測モデル

岩田[1997]にしたがい、先物市場に参加する各取引者の行動は次のようにモデル化される。2 期間モデルを想定し、記号表記は次のとおりである。$\tilde{\pi}_1$：来期（１時点）における投資家の予想利潤、$\tilde{p}_1^f$：来期（１時点）における投資家の予想先物価格、$\bar{p}_1^f$：来期（１時点）における投資家の予想先物価格の期待値、$\sigma_f^2$：先物価格予想値の分散、$p_0^f$：今期（0 時点）における先物価格、これが今期に決定される。$X_0$：今期（0 時点）における先物契約保有枚数とする。$\tilde{p}_1^s$：来期（１時点）における投資家の予想現物価格、$\bar{p}_1^s$：来期（１時点）における投資家の予想現物価格の期待値、$\sigma_s^2$：現物価格予想値の分散、$Y_0$：現物株の保有量。

　各取引者は先物と現物株を取引するものとする。すると来期に得られる取引者の予想利潤は次のようになる。

$$\tilde{\pi}_1 = X_0(\tilde{p}_1^f - p_0^f) + Y_0(\tilde{p}_1^s - p_0^s) \tag{1}$$

取引者は来期の利潤の効用の主観的期待値$E(U[\tilde{\pi}_1])$を最大になるように行動するものとし、$\tilde{\pi}_1$の効用の期待値は

$$E(U[\tilde{\pi}_1]) = E(\tilde{\pi}_1) - \frac{a}{2}\mathrm{var}(\tilde{\pi}_1) \qquad (2)$$

と表されるものとする。ただし$a$は正の一定値、$E(\tilde{\pi}_1)$は$\tilde{\pi}_1$の期待値、$Var(\tilde{\pi}_1)$は$\tilde{\pi}_1$の分散を意味する。

　すると予想利潤の期待値は

$$E(\tilde{\pi}_1) = X_0(\bar{p}_1^f - p_0^f) + Y_0(\bar{p}_1^s - p_0^s) \qquad (3)$$

予想利潤の分散は

$$Var(\tilde{\pi}_1) = X_0^2\sigma_f^2 + Y_0^2\sigma_s^2 + 2Cov(\tilde{p}_1^f, \tilde{p}_1^s)X_0Y_0 \qquad (4)$$

のように表すことができる。$Cov(\tilde{p}_1^f, \tilde{p}_1^s)$は$\tilde{p}_1^f$と$\tilde{p}_1^s$の共分散である。現物のポジション$Y_0^*$は与えられているものとすると、$\tilde{\pi}_1$の効用の期待値$E(\tilde{\pi}_1)$を最大化する片建玉$X_0$の値は

$$\frac{\partial E(\tilde{\pi}_1)}{\partial X_0} = (\bar{p}_1^f - p_0^f) - a\sigma_f^2 X_0 - aCov(\tilde{p}_1^f, \tilde{p}_1^s)Y_0^* = 0 \qquad (5)$$

より

$$X_0 = \frac{(\bar{p}_1^f - p_0^f)}{a\sigma_f^2} - \frac{Cov(\tilde{p}_1^f, \tilde{p}_1^s)}{\sigma_f^2}Y_0^* \qquad (6)$$

となる。取引者を識別するために$i$で表すことにしよう。$\sigma_{sfi} = Cov(\tilde{p}_{i1}^f, \tilde{p}_{i1}^s)$と表すと

$$X_{i0} = \frac{1}{a_i\sigma_{fi}^2}[(\bar{p}_{i1}^f - p_0^f) - a_iY_{i0}^*\sigma_{sfi}] \qquad (7)$$

$\alpha_i = \dfrac{1}{a_i\sigma_{fi}^2}$、$\gamma_i = \dfrac{\sigma_{sfi}}{\sigma_{fi}^2}$とする。すると、

$$X_{i0} = \alpha_i(\bar{p}_{i1}^f - p_0^f) - \gamma_iY_{i0}^* \qquad (8)$$

これを一般化して現在時点を$t$で示せば

$$X_{it} = \alpha_i(\bar{p}_{i,t+1}^f - p_t^f) - \gamma_iY_{it}^* \qquad (9)$$

計測を行うためにもう一工夫が必要である。日本経済新聞に掲載される証券会社のネットの建玉には証券会社の自己売買部門の建玉も顧客（個人や法人）の委託玉の両方が含まれ

ている。そこである証券会社には H 人の取引者が存在して取引を行っているとしよう。そのＨ人について（９）の合計を計算すると以下のようになる。

$$\sum_{i=1}^{H} X_{it} = \sum_{i=1}^{H} \alpha_i (\overline{p}_{it}^{f} - p_t^{f}) - \sum_{i=1}^{H} \gamma_i Y_{it}^{*} \tag{10}$$

ここで、$\sum_{i=1}^{H} X_{it} = \sum_{i=1}^{H} \alpha_i (\overline{p}_{it}^{f} - p_t^{f})$について、Ｈが十分に大であり、$\alpha_i$と$\overline{p}_{it}$の水準が独立であるとの仮定を利用すると(10)式を以下のように書き換えることができる。

$$\sum_{i=1}^{H} X_{it} = \sum_{i=1}^{H} \alpha_i (\overline{p}_{it}^{f} - p_t^{f}) - \sum_{i=1}^{H} \gamma_i Y_{it}^{*} = \sum_{i=1}^{H} \alpha_i \overline{p}_{i,t+1}^{f} - \sum_{i=1}^{H} \alpha_i p_t^{f} - \sum_{i=1}^{H} \gamma_i Y_{it}^{*}$$

$$= H \frac{1}{H} \sum_{i=1}^{H} \alpha_i \overline{p}_{i,t+1}^{f} - \sum_{i=1}^{H} \alpha_i p_t^{f} - H \frac{1}{H} \sum_{i=1}^{H} \gamma_i Y_{it}^{*}$$

$$= H \frac{1}{H} \sum_{i=1}^{H} \alpha_i \frac{1}{H} \sum_{i=1}^{H} \overline{p}_{i,t+1}^{f} - \sum_{i=1}^{H} \alpha_i p_t^{f} - H \frac{1}{H} \sum_{i=1}^{H} \gamma_i \frac{1}{H} \sum_{i=1}^{H} Y_{it}^{*} \tag{11}$$

ここで$\varepsilon_{it}$を取引者ｉが入手したｔ期に発生した情報として次のような期待形成を想定する。

$$\overline{p}_{i,t+1}^{f} = \overline{p}_{it}^{f} + \varepsilon_{it} \tag{12}$$

（12）式を（11）式の右辺第１項に代入すると、

$$H \frac{1}{H} \sum_{i=1}^{H} \alpha_i \frac{1}{H} \sum_{i=1}^{H} \overline{p}_{i,t+1}^{f} = H \frac{1}{H} \sum_{i=1}^{H} \alpha_i \frac{1}{H} \sum_{i=1}^{H} (\overline{p}_{it}^{f} + \varepsilon_{it})$$

$$= H \frac{1}{H} \sum_{i=1}^{H} \alpha_i \frac{1}{H} \sum_{i=1}^{H} \overline{p}_{it}^{f} + H \frac{1}{H} \sum_{i=1}^{H} \alpha_i \frac{1}{H} \sum_{i=1}^{H} \varepsilon_{it} \tag{13}$$

ここで

$$\frac{1}{H} \sum_{i=1}^{H} \varepsilon_{it} = \mu_t$$

としてみよう。すると（13）式は

$$H \frac{1}{H} \sum_{i=1}^{H} \alpha_i \frac{1}{H} \sum_{i=1}^{H} \overline{p}_{i,t+1}^{f} = \sum_{i=1}^{H} \alpha_i \frac{1}{H} \sum_{i=1}^{H} \overline{p}_{it}^{f} + \sum_{i=1}^{H} \alpha_i \mu_t \tag{14}$$

同様に考えて、次のような期待形成を仮定する。

$$\overline{p}_{it}^{f} = \overline{p}_{i,t-1}^{f} + \varepsilon_{i,t-1} \tag{15}$$

(15)式を（14）式の右辺第１項に代入すると

$$\sum_{i=1}^{H} \alpha_i \frac{1}{H} \sum_{i=1}^{H} \overline{p}_{it}^{f} + \sum_{i=1}^{H} \alpha_i \mu_t = \sum_{i=1}^{H} \alpha_i \frac{1}{H} \sum_{i=1}^{H} (\overline{p}_{i,t-1}^{f} + \varepsilon_{i,t-1}) + \sum_{i=1}^{H} \alpha_i \mu_t \tag{16}$$

(16)式の右辺第１項については

$$\sum_{i=1}^{H} \alpha_i \frac{1}{H} \sum_{i=1}^{H} (\overline{p}_{i,t-1}^{f} + \varepsilon_{i,t-1}) = H \frac{1}{H} \sum_{i=1}^{H} \alpha_i \frac{1}{H} \sum_{i=1}^{H} (\overline{p}_{i,t-1}^{f} + \varepsilon_{i,t-1})$$

$$= H\frac{1}{H}\sum_{i=1}^{H}\alpha_i\frac{1}{H}\sum_{i=1}^{H}\overline{p}_{i,t-1}^{f} + H\frac{1}{H}\sum_{i=1}^{H}\alpha_i\frac{1}{H}\sum_{i=1}^{H}\varepsilon_{i,t-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{H}\alpha_i\frac{1}{H}\sum_{i=1}^{H}\overline{p}_{i,t-1}^{f} + \sum_{i=1}^{H}\alpha_i\mu_{t-1} \quad (17)$$

したがって(16)式は

$$\sum_{i=1}^{H}\alpha_i\frac{1}{H}\sum_{i=1}^{H}\overline{p}_{it}^{f} + \sum_{i=1}^{H}\alpha_i\mu_t = \sum_{i=1}^{H}\alpha_i\frac{1}{H}\sum_{i=1}^{H}(\overline{p}_{i,t-1}^{f} + \varepsilon_{i,t-1}) + \sum_{i=1}^{H}\alpha_i\mu_t$$

$$= \sum_{i=1}^{H}\alpha_i\frac{1}{H}\sum_{i=1}^{H}\overline{p}_{i,t-1}^{f} + \sum_{i=1}^{H}\alpha_i\mu_t + \sum_{i=1}^{H}\alpha_i\mu_{t-1} \quad (18)$$

これを繰り返していくと

$$\sum_{i=1}^{H}\alpha_i\frac{1}{H}\sum_{i=1}^{H}\overline{p}_{it}^{f} + \sum_{i=1}^{H}\alpha_i\mu_t = \sum_{i=1}^{H}\alpha_i\frac{1}{H}\sum_{i=1}^{H}\overline{p}_{i0}^{f} + \sum_{i=1}^{H}\alpha_i(\mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_t)$$

$$= \sum_{i=1}^{H}\alpha_i(\frac{1}{H}\sum_{i=1}^{H}\overline{p}_{i0}^{f} + \mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_t)$$

したがって計測式は

$$\sum_{i=1}^{H}X_{it} = \sum_{i=1}^{H}\alpha_i\frac{1}{H}\sum_{i=1}^{H}\overline{p}_{i0}^{f} + \sum_{i=1}^{H}\alpha_i(\mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_t) - \sum_{i=1}^{H}\alpha_i p_t^f + H\frac{1}{H}\sum_{i=1}^{H}\gamma_i\frac{1}{H}\sum_{i=1}^{H}Y_{it}^{*}$$

$$= \sum_{i=1}^{H}\alpha_i(\frac{1}{H}\sum_{i=1}^{H}\overline{p}_{i0}^{f} + \mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_t) - \sum_{i=1}^{H}\alpha_i p_t^f + \frac{1}{H}\sum_{i=1}^{H}\gamma_i\sum_{i=1}^{H}Y_{it}^{*} \quad (19)$$

もし $\mu_0 = \mu_1 = \cdots = \mu_{t-1} = \mu_t = 0$ であるならば

$$\sum_{i=1}^{H}X_{it} = \sum_{i=1}^{H}\alpha_i\frac{1}{H}\sum_{i=1}^{H}\overline{p}_{i0}^{f} - \sum_{i=1}^{H}\alpha_i p_t^f + \frac{1}{H}\sum_{i=1}^{H}\gamma_i\sum_{i=1}^{H}Y_{it}^{*} \quad (20)$$

ということになり、証券会社の現物のポジションがわかれば、超過需要関数(20)式を推定することが可能となる。

## 3.まとめ

本稿では現物株の保有量をも含めた形で証券会社別の日経平均先物超過需要関数を導出した。本稿で導出した超過需要関数を推定するためには現物株の保有量にどのようなデータを使うのかが問題となる。この問題が解決されれば、本稿で導出したモデルは推定可能となり、需給の一致で価格を決める経済学の理論で現物株市場と日経平均先物市場の同時均衡によって均衡価格を決めることも可能となる。

## 4.参考文献

岩田暁一[1997]「先物市場における期待形成と価格決定」『商品取引所論体系　7』全国商品取引所連合会、第２章、pp.107-125。