分散リスク・プレミアム

一橋大学経済研究所教授 渡部敏明

1 はじめに

アメリカのシカゴ・ボード・オプション取引所 (CBOE) では、VIX と呼ばれるボラティリティの指標を計算している。これは S&P500 オプション価格から計算したボラティリティであり、投資家が今後 S&P500 指数がどの程度変動すると予想しているかを表しているので、「恐怖指数」とも呼ばれ、注目を集めている。日本でも日経 225 オプション価格から計算された日経 VI の先物取引が行われている。

これらのボラティリティは 2 つの重要な特徴を持つ。一つは、従来のブラック・ショールズ・モデルを前提としていないことであり、そのため、「モデル・フリー・インプライド・ボラティリティ」とも呼ばれる。ブラック・ショールズ・モデルは、原資産価格のボラティリティをオプションの満期まで一定であると仮定するので、ボラティリティが時間を通じて変動するなら正しくない。それに対して、VIX や日経 VI はボラティリティの変動を許容して計算されている。もう一つは、VIX や日経 VI の 2 乗は現在から 1ヶ月先までの原資産価格変化率の分散の危険中立測度の下での期待値の近似値になっていることである。そこで、VIX や日経 VI の 2 乗から現在から 1ヶ月先までの原資産価格変化率の現実の測度の下での期待値を引くと分散リスク・プレミアムを計算できる。この分散リスク・プレミアムについては現在盛んに研究が行われており、将来の景気や金融市場の予測に有用であることが明らかになってきている[1]。

本稿では分散リスク・プレミアムの計算方法について解説し、日経 225 の分散リスク・プレミアムを計算する。分散リスク・プレミアムの計算には、現在から 1ヶ月先までの原資産価格変化率の現実の測度の下での期待値を計算する必要があるが、日中の高頻度データから計算される Realized Volatility (RV) を用いて、現在から 1ヶ月先までの月次 RV の期待値 (予測値) として計算することが多い。そのためには、RV の変動をモデル化する必要があり、分散リスク・プレミアムの計算では、Corsi (2009) によって提案された HAR (heterogeneous interval autoregressive) モデルやそれを拡張したモデルがよく用いられる。本稿ではそうしたモデルを用いた分散リスク・プレミアムの計算方法を説明する。

本稿の構成は以下の通りである。まず第 2 節で分散リスク・プレミアムを定義し、続く第 3 節でその計算方法を説明する。第 4 節で日経 225 の分散リスク・プレミアムを計算し、最後に、第 5 節で今後の研究課題について述べる。

---

[*]本研究について、生方雅人氏（釧路公立大学）から有益なコメントをもらった。記して感謝したい。

[1]詳しくは、Ubukata and Watanabe (2014) を参照されたい。

2 分散リスク・プレミアム

原資産価格 S_t が以下の拡散過程に従うものとする。

$$dS_t/S_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t \tag{1}$$

ここで、μ_t はドリフト、σ_t は瞬時的ボラティリティ、W_t は標準ブラウン運動である。ジャンプを加えることもできるが、ここでは簡単化のため、ジャンプは考えない。

このとき、t 期から $t+\tau$ 期までの原資産価格変化率の分散は以下のように表せる。

$$\mathrm{IV}_{t,t+\tau} = \int_t^{t+\tau} \sigma_s^2 ds. \tag{2}$$

これは瞬時的ボラティリティ σ_s^2 を積分したものなので、Integrated Volatility (IV) と呼ばれる。

$\mathrm{IV}_{t,t+\tau}$ の危険中立測度、現実測度の下での期待値をそれぞれ $\mathrm{E}_t^Q[\mathrm{IV}_{t,t+\tau}]$、$\mathrm{E}_t^P[\mathrm{IV}_{t,t+\tau}]$ で表すと、分散リスク・プレミアムはそれらの差として定義される。

$$\mathrm{VRP}_t = \mathrm{E}_t^Q[\mathrm{IV}_{t,t+\tau}] - \mathrm{E}_t^P[\mathrm{IV}_{t,t+\tau}]. \tag{3}$$

以下では、$\tau = 22$ (1ヶ月) とする。

3 分散リスク・プレミアムの計算法

VIX や日経 VI はオプション価格から $\mathrm{E}_t^Q[\mathrm{IV}_{t,t+22}]$ の近似値を計算し、平方根をとったものである[2]。そこで、VIX や日経 VI を 2 乗すれば、$\mathrm{E}_t^Q[\mathrm{IV}_{t,t+22}]$ を計算できる。ただし、VIX や日経 VI は年率化されているので、月次の値にするためには、さらに 12 で割る必要がある。また、$\mathrm{E}_t^Q[\mathrm{IV}_{t,t+22}]$ は厳密にはオプション価格を権利行使価格の 2 乗で割ったものを権利行使価格で積分したものになるので、実際に計算する場合は、積分を総和で近似する必要がある。VIX や日経 VI では市場で取引されているオプションだけを用いた総和で近似しており、そうすると近似誤差が大きくなる可能性がある。Jiang and Tian (2005, 2007) は近似精度を上げるために、取引されていない権利行使価格とそのオプション価格を補間および補外する方法を提案している。大阪大学金融保険教育研究センター (CSFI) が補間および補外を行った VXJ を計算しているので、次節の日経 225 の分散リスク・プレミアムの計算では、VXJ を 2 乗し 12 で割ったものを用いている。VXJ の計算方法については、Fukasawa et al. (2011) を参照されたい。

$\mathrm{E}_t^P[\mathrm{IV}_{t,t+22}]$ の計算は、日中の高頻度データから計算される RV を用いることが多い。いま、第 t 日の日中の n 個の価格変化率データ $\left(r_{t-1+1/n}, r_{t-1+2/n}, \ldots, r_t\right)$ が与えられているとする。このとき、それらを 2 乗して足し合わせた

$$\mathrm{RV}_t = \sum_{i=1}^{n} r_{t-1+i/n}^2. \tag{4}$$

[2]詳しくは、渡部 (2013) を参照されたい。

を第 t 日の RV という。もし価格にノイズがなければ、(4) 式で定義される RV_t は, $n \to \infty$ とすると、(2) 式で定義される t 日の真のボラティリティ $\mathrm{IV}_{t-1,t}$ に確率収束する。そこで、n が十分大きいなら、RV_t は $\mathrm{IV}_{t-1,t}$ の精度の高い推定量となり、$\mathrm{E}_t^P[\mathrm{IV}_{t,t+22}] = \mathrm{E}_t^P[\sum_{i=1}^{22} \mathrm{RV}_{t+i}]$ として計算できる。

しかし、実際の高頻度の資産価格はマイクロストラクチャー・ノイズ[3]を含むので、RV_t はバイアスを持ち、$n \to \infty$ としても RV_t は $\mathrm{IV}_{t-1,t}$ に収束しない。そこで、次節の日経 225 の分散リスク・プレミアムの計算では、マイクロストラクチャー・ノイズによるバイアスを考慮した Realized Kernel (RK) を用いている。RK について詳しくは、Barndorff-Nielsen et al. (2008, 2009) を参照されたい。

第 t 日のボラティリティを $t-1$ 日の終値から t 日の終値までのボラティリティと定義すると、$t-1$ 日の終値から t 日の始値までの間も考慮に入れなければならないが、その間は取引がないので、高頻度のリターンを計算することができない。また、 日本の株式市場では昼休みがあるので、その間も同様である。 夜間や昼休みのリターンは時間間隔が長いので、そのまま 2 乗して加えると、 時間の離散化による誤差が大きくなる。また、夜間や昼休みのリターンを無視すると、 それらの時間帯を含む 1 日のボラティリティを過小評価してしまう。

Hansen and Lunde (2005) は以下のように最初に昼休みと夜間を除いて計算した $\mathrm{RV}_t^{(o)}$ に日次リターン R_t の標本分散と $\mathrm{RV}_t^{(o)}$ の標本平均の比を掛けるという方法を提案している。

$$\mathrm{RV}_t = c\mathrm{RV}_t^{(o)}, \quad c = \frac{\sum_{t=1}^{T}(R_t - \overline{R})^2}{\sum_{t=1}^{T} \mathrm{RV}_t^{(o)}}. \tag{5}$$

ここで、$\overline{R}$ は日次リターンの標本平均を表す。この方法を用いると、 RV の標本平均と日次リターンの標本分散が等しくなる。次節では、この方法を用いて RK を調整している。

$\mathrm{E}_t^P[\sum_{i=1}^{22} \mathrm{RV}_{t+i}]$ を計算するためには RV の変動を表すモデルが必要になる。RV の変動を表すモデルはいくつか提案されているが[4]、分散リスク・プレミアムの計算によく使われるのは、Corsi (2009) によって提案された HAR (heterogeneous interval autoregressive) モデルやそれを拡張したモデルである。HAR モデルは以下の式で表される。

$$\ln \mathrm{RV}_t = \alpha_0 + \alpha_1 \ln \mathrm{RV}_{t-1} + \alpha_2 \ln \mathrm{RV}_{t-1}^{(5)} + \alpha_3 \ln \mathrm{RV}_{t-1}^{(22)} + u_t, \quad u_t \sim NID(0, \sigma_u^2). \tag{6}$$

ここで、$\mathrm{RV}_{t-1}^{(h)} = \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{h} \mathrm{RV}_{t-i}$ であり、$h = 5$ の場合は週次 RV、$h = 22$ の場合は月次 RV に対応する。誤差項 u_t は独立な正規分布に従うと仮定する。

このモデルは、市場には様々な投資期間を持つ投資家がいるので、日次 RV を過去の日次 RV だけでなく、過去の週次や月次 RV にも依存させる。RV は自己相関の減衰のスピードが遅く、長期記憶性を持つとする研究も少なくない。HAR モデルは長期記憶モデルではないが、RV_t は 22 期前の RV_{t-22} の値まで依存することになる。アドホックなモデルではあるが、いくつかの研究で、このモデルのボラティ

[3]詳しくは, Campbell et al. (1997) を参照されたい。
[4]渡部 (2007) を参照されたい。

リティの予測精度が悪くないことが示されている[5]。(6) 式では、RV の対数を取っているが、対数を取らないモデルもある。対数を取らないと RV の予測値が負になる可能性があるのと、対数を取った方が分布が正規分布に近くなるので、ここでは対数を取ったモデルだけを考える。

このモデルを使って $\mathrm{E}_t^P[\sum_{i=1}^{22}\mathrm{RV}_{t+i}]$ を計算するためにはシミュレーションが必要なので、以下のように修正したモデルが使われることが多い。

$$\ln \mathrm{RV}_t^{(22)} = \beta_0 + \beta_1 \ln \mathrm{RV}_{t-22}^{(1)} + \beta_2 \ln \mathrm{RV}_{t-22}^{(5)} + \beta_3 \ln \mathrm{RV}_{t-22}^{(22)} + v_t, \quad v_t \sim NID(0, \sigma_v^2). \tag{7}$$

ここでは、$\mathrm{RV}_t^{(h)} = \frac{22}{h}\sum_{i=1}^{h}\mathrm{RV}_{t+1-i}$ と定義する。そうすると、$\mathrm{E}_t^P[\sum_{i=1}^{22}\mathrm{RV}_{t+i}] = \mathrm{E}_t^P\left[\mathrm{RV}_{t+22}^{(22)}\right]$ となり、それは以下のように計算できる。

[1] t 期までのデータを使って $(\beta_0, \ldots, \beta_3)$ を最小 2 乗推定し[6]、残差分散を計算する。

[2] [1] で推定した $(\beta_0, \ldots, \beta_3)$ の推定値 $(\hat{\beta}_0, \ldots, \hat{\beta}_3)$ と残差分散 $\hat{\sigma}_v^2$ を用いて以下の計算を行う[7]。

$$\mathrm{E}_t^P\left[\mathrm{RV}_{t+22}^{(22)}\right] = \exp\left[\mathrm{E}_t^P\left[\ln \mathrm{RV}_{t+22}^{(22)}\right] + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_v^2\right]. \tag{8}$$

ここで、

$$\mathrm{E}_t^P\left[\ln \mathrm{RV}_{t+22}^{(22)}\right] = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \ln \mathrm{RV}_t^{(1)} + \hat{\beta}_2 \ln \mathrm{RV}_t^{(5)} + \hat{\beta}_3 \ln \mathrm{RV}_t^{(22)}. \tag{9}$$

4 日経 225 の分散リスク・プレミアム

本節では、前節で説明した方法に基づいて日経 225 の分散リスク・プレミアムを計算する。$\mathrm{E}_t^Q[\mathrm{IV}_{t,t+22}]$ には、大阪大学金融保険教育研究センター (CSFI) の VXJ を 2 乗し 12 で割ったものを用いた。$\mathrm{E}_t^P[\mathrm{IV}_{t,t+22}]$ の計算には、Oxford University Man Institute Realized Library から日経 225 の RK を Hansen and Lunde (2005) の方法により調整したものを用いた。標本期間は 2000/1/4–2014/8/29 である。ただし、Oxford University Man Institute Realized Library の日経 225 の RK には営業日であってもデータの無い日があるので、そうした日は削除した。

ここでは、Bekaert and Hoerova (2014) に従い、月次 RV の変動を表す式として、(7) 式にさらにいくつかの説明変数を加えた以下の式を用いた。

$$\begin{aligned}\ln \mathrm{RV}_t^{(22)} =& \gamma_0 + \gamma_1 \ln \mathrm{RV}_{t-22}^{(1)} + \gamma_2 \ln \mathrm{RV}_{t-22}^{(5)} + \gamma_3 \ln \mathrm{RV}_{t-22}^{(22)} + \gamma_4 \ln(\mathrm{VXJ}_{t-22}^2/12) \\ &+ \gamma_5 R_{t-22}^{(1)-} + \gamma_6 R_{t-22}^{(5)-} + \gamma_7 R_{t-22}^{(22)-} + w_t, \quad w_t \sim NID(0, \sigma_w^2).\end{aligned} \tag{10}$$

[5] 渡部 (2007) を参照されたい。

[6] 例えば、$\ln \mathrm{RV}_t^{(22)}$ と $\ln \mathrm{RV}_{t-1}^{(22)}$ は $t-21$ 期から $t-1$ 期までの期間が重なっている。このように被説明変数に期間の重なった標本を用いると、誤差項に高い自己相関が生じるので、最小 2 乗推定量は不偏性は満たすが、効率性は満たさない。先行研究では、最小 2 乗法をそのまま用いて、標準誤差を計算に、誤差項の自己相関を考慮した Newey and West (1987) の方法を用いている。

[7] (8) 式は、$\ln(X) \sim N(\mu, \sigma^2)$ の場合、$\mathrm{E}(X) = \exp(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)$ であることを使っている。

ここで、R_t を日次リターンとすると、$R_t^{(h)-} = \min\left[\frac{22}{h}\sum_{j=1}^{h} R_{t-j+1}, 0\right]$ である。この式のパラメータを、$t-349$ 期から t 期までのデータを用いて最小 2 乗推定し、

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_t^P[\ln \mathrm{RV}_{t+22}^{(22)}] =& \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 \ln \mathrm{RV}_t^{(1)} + \hat{\gamma}_2 \ln \mathrm{RV}_t^{(5)} + \hat{\gamma}_3 \ln \mathrm{RV}_t^{(22)} + \hat{\gamma}_4 \ln(\mathrm{VXJ}_t^2/22) \\ &+ \hat{\gamma}_5 R_t^{(1)-} + \hat{\gamma}_6 R_t^{(5)-} + \hat{\gamma}_7 R_t^{(22)-}. \end{aligned} \tag{11}$$

を (8) 式に代入した。それを $\mathrm{VXJ}_t^2/12$ から引くことにより、t 期の分散リスク・プレミアムを計算した。これを $t=351$ から標本の最後まで繰り返すことにより、2001/7/11–2014/8/29 の分散リスク・プレミアムを計算した。

結果は図 1 に示されている。分散リスク・プレミアムが 200 を超えているのは、アメリカ同時多発テロ直後の 2001/9/12-13、リーマンショック後の 2008/10/23、東日本大震災直後の 2011/3/15-17 である。リーマンショック後の金融危機の時期は分散リスク・プレミアムが高い日が続いている。この方法の問題点は、RV が大幅にジャンプすると、分散リスク・プレミアムが負になってしまうことである。ここでも、リーマンショック後の 2008 年 10 月と 11 月は分散リスク・プレミアムが大幅に負になっている日がある。これは、Bekaert and Hoerova (2014) の S&P500 の分散リスク・プレミアムでもそうなっており、この点については今後の課題としたい。

5 今後の研究課題

本稿では分散リスク・プレミアムの計算方法について解説するとともに、日経 225 の分散リスク・プレミアムを計算した。ここでは、RV の変動を表すモデルに (10) 式を用いたが、モデルを変えると、当然、分散リスク・プレミアムの値も変わる。Bekaert and Hoerova (2014) は、$\mathrm{RV}_{t-22}^{(1)}$、$\mathrm{RV}_{t-22}^{(5)}$、$\mathrm{RV}_{t-22}^{(22)}$ をジャンプとそれ以外に分離して、(10) 式の説明変数に加えている。そうした拡張も含め、今後はどのモデルが RV の変動を表すモデルとして適切であるかを分析する必要があり、現在研究を進めている。また、適切なモデルを用いて分散リスク・プレミアムを計算した場合、将来の景気や金融市場の予測精度が高まるかどうかも興味深い。

参考文献

Barndorff-Nielsen, O. E., Hansen, P. R., Lunde, A. and Shephard, N. (2008), "Designing realized kernels to measure the ex-post variation of equity prices in the presence of noise," *Econometrica*, 76(6), 1481–1536.

Barndorff-Nielsen, O. E., Hansen, P. R., Lunde, A. and Shephard, N. (2009), "Realized kernel in practice: trades and quotes," *Econometric Journal*, 12(3), C1–C32.

Bekaert, G. and Hoerova, M. (2014), "The VIX, the variance premium and stock market volatility," *Journal of Econometrics*, forthcomimg.

Campbell, J. Y., Lo, A. W. and Mackinlay, A. C. (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton: Princeton University Press. (祝迫得夫・大橋和彦・中村信弘・本田俊毅・和田賢治訳 (2003). 『ファイナンスのための計量分析』共立出版.)

Corsi, F. (2009), "A simple approximate long-memory model of realized volatility," *Journal of Financial Econometrics*, 7(2), 174–196.

Fukasawa, M, Ishida,I., Maghrebi, N., Oya, K., Ubukata, M. and Yamazaki, K. (2011) "Model-free implied volatility: from surface to index," *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 14(4), 433–463

Hansen, P. R. and Lunde, A. (2005), "A forecast comparison of volatility models: Does anything beat a GARCH(1,1)?" *Journal of Applied Econometrics*, 20(7), 873–889.

Jiang, G. J. and Tian, Y. S. (2005), "The model-free implied volatility and its information content," *Review of Financial Studies*, 18(4), 1305–1342.

Jiang, G. J. and Tian, Y. S. (2007), "Extracting model-free volatility from option prices: an examinaion of VIX index," *Journal of Derivatives*, 14(3), 35–60.

Newey, W. and West, K. (1987), "A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix," *Econometrica*, 55(3), 703–708.

Ubukata, M. and Watanabe, T. (2014), "Market variance risk premiums in Japan for asset predictability," *Empirical Economics*, 47(1), 169–198.

渡部敏明 (2007)「Realized Volatility–サーベイと日本の株式市場への応用」『経済研究』58(4), 352–373.

渡部敏明 (2013)「モデル・フリー・インプライド・ボラティリティの計算方法について」『先物オプションレポート』25(7).

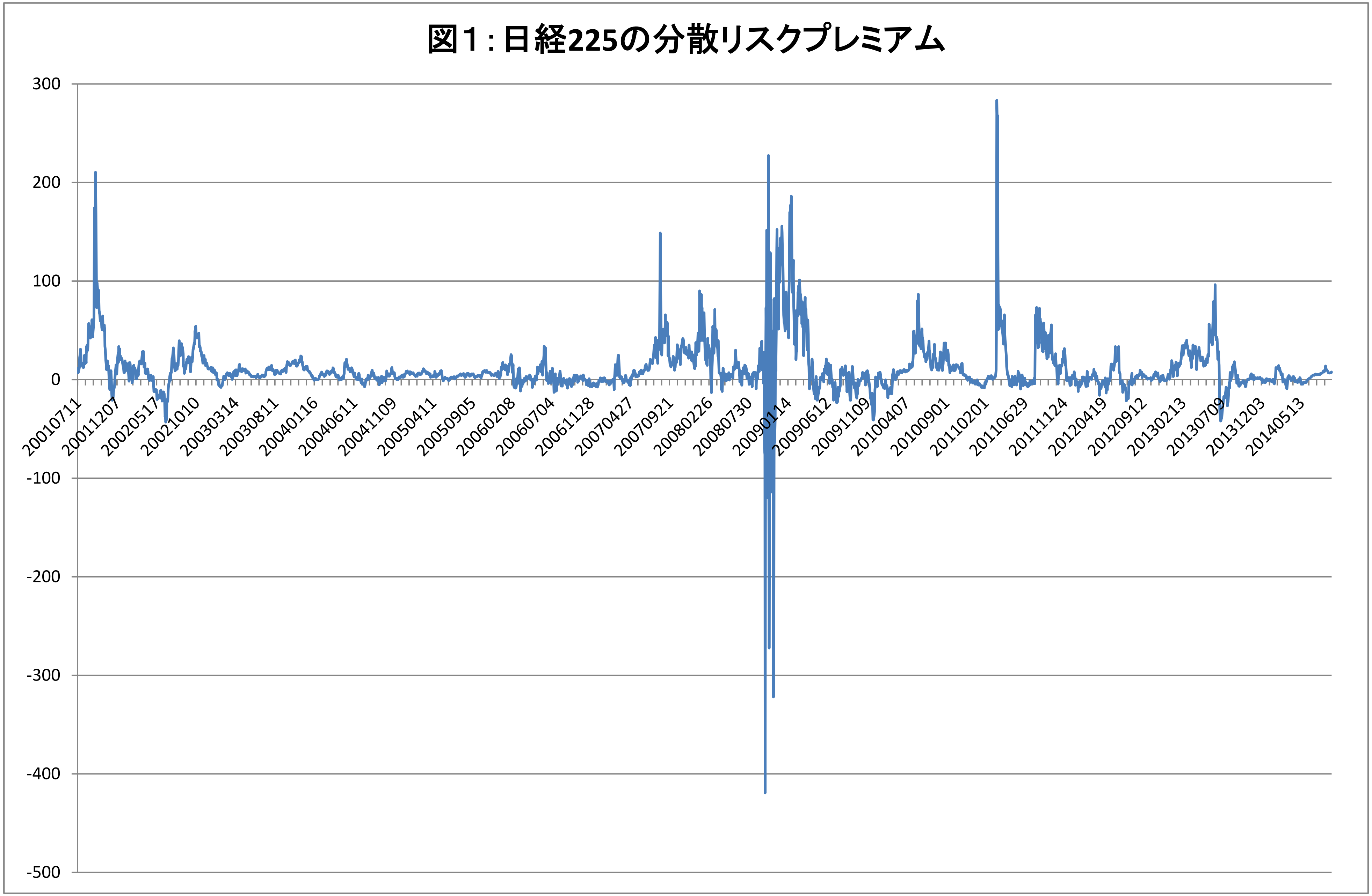
図1：日経225の分散リスクプレミアム
300
200
100
0
-100
-200
-300
-400
-500
20010711
20011207
20020517
20021010
20030314
20030811
20040116
20040611
20041109
20050411
20050905
20060208
20060704
20061128
20070427
20070921
20080226
20080730
20090114
20090612
20091109
20100407
20100901
20110201
20110629
20111124
20120419
20120912
20130213
20130709
20131203
20140513