

モデル・フリー・インプライド・ボラティリティの 計算方法について

一橋大学経済研究所教授 渡部敏明

1 はじめに

オプション価格から計算されるインプライド・ボラティリティは、古くはブラック・ショールズの公式を用いて計算されていた。しかし、この公式は、原資産価格のボラティリティをオプションの満期まで一定であると仮定するので、ボラティリティが時間を通じて変動するなら正しくない。そこで、近年では、ボラティリティの変動を許容し、ブラック・ショールズの公式を使わずに計算されるモデル・フリー・インプライド・ボラティリティ(MFIV)に注目が集まっている。

アメリカのシカゴ・ボード・オプション取引所(CBOE)では、S&P500 オプション価格からVIXと呼ばれるMFIVを計算している。日本でも、大阪証券取引所で2012年2月27日より日経平均ボラティリティ・インデックス(VI)先物取引が始まり、その原資産である日経平均VIが日経平均オプション価格からMFIVとして計算されるようになった。しかし、CBOEのVIXの計算方法には問題点が指摘されている。MFIVの計算では、オプション価格を権利行使価格の2乗で割ったものを権利行使価格で積分する必要があるが、CBOEのVIXではそれを市場で取引されている権利行使価格の異なるオプションだけを用いた総和で近似している。市場で取引されている権利行使価格の異なるオプションの数は限られているので、この方法だと近似誤差が大きくなる可能性がある。Jiang and Tian (2005)は近似精度を上げるために、取引されていない権利行使価格とそのオプション価格を補間および補外する方法を提案している。Jiang and Tian (2007)は、この方法を用いて計算したS&P500のMFIVはCBOEのVIXより高く、CBOEのVIXには負のバイアスがあることを示している。

日経平均VIもVIXに倣って計算されているので、同様の問題が生じる。日経平均のMFIVについては、大阪大学金融保険教育研究センター(CSFI)が、補間および補外を行ったCSFI-VXJとそれらを行わないVXJを両方計算し公表している。そこで、本稿では、それらを用いて、両者にどのような違いがあるかを比較検討する。

本稿の構成は以下の通りである。まず第2節で、MFIVの計算方法とその問題点について簡単に説明する。続く第3節でVXJとCSFI-VXJを比較する。最後に、第4節で本稿をまとめると共に今後の研究課題について述べる。

*本研究は、一橋大学研究プロジェクト「大規模・高頻度データを用いた金融危機・震災・グローバル化の経済分析」、平成25年度一橋大学共同利用・共同研究プロジェクト研究「高頻度データを用いたボラティリティ変動モデルの開発とリスク管理への応用」、文部科学省科学研究費補助金(課題番号: 21243018, 25245034)から助成を受けている。

2 MFIV

S を原資産価格、 0 を現時点、 T をオプションの満期、 r を安全資産の金利、 F を満期 T の先渡価格、 $P(T, K)$ 、 $C(T, K)$ をそれぞれ満期 T 、権利行使価格 K のプット、コール・オプションの価格とすると、以下の式が成り立つ。(詳しくは杉原 (2010) を参照されたい。)

$$E_0^Q \left[\frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{dS}{S} \right)^2 \right] = \frac{2 \exp(rT)}{T} \left[\int_0^F \frac{P(T, K)}{K^2} dK + \int_F^\infty \frac{C(T, K)}{K^2} dK \right]. \quad (1)$$

ここで、 $E_0^Q[\cdot]$ は 0 時点における危険中立測度 Q の下での期待値を表す。

VIX, 日経平均 VI では、これを市場で取引されている out-of-the money オプションのみを使って計算している。市場で取引されている out-of-the money オプションの権利行使価格を小さいものから順に (K_1, \dots, K_n) とする。 $0 < K_1 < \dots < K_f \leq F < K_{f+1} < \dots < K_n$ とすると、 (K_1, \dots, K_f) ではプットオプションの価格、 (K_{f+1}, \dots, K_n) ではコールオプションの価格を使って、(1) 式を以下のように近似計算する。

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{2 \exp(rT)}{T} \left[\sum_{i=1}^f \frac{P(T, K_i)}{K_i^2} \Delta K_i + \sum_{j=f+1}^n \frac{C(T, K_j)}{K_j^2} \Delta K_j \right] - \frac{1}{T} \left(\frac{F}{K_f} - 1 \right)^2. \quad (2)$$

ここで、右辺第 2 項の $-\frac{1}{T} \left(\frac{F}{K_f} - 1 \right)^2$ は先渡価格に等しい権利行使価格がない場合に生じる誤差を修正するための項である。(先渡価格に等しい権利行使価格がある場合には、 $K_f = F$ なので、この項は 0 になる。)

また、通常、満期がちょうど 1 ヶ月 (30 日) のオプションは取引されていない。そこで、満期が 1 ヶ月未満のオプション (満期を T_1 とする) と 1 ヶ月以上 2 ヶ月未満のオプション (満期を T_2 とする) からそれぞれ (2) 式により $\hat{\sigma}_1^2$ と $\hat{\sigma}_2^2$ を計算し加重平均する。それを、以下のように、平方根を取って標準偏差にし、さらに 100 を掛けて % 表示にしたものが、1 ヶ月の VIX である。

$$\text{VIX} = 100 \times \sqrt{w \hat{\sigma}_1^2 + (1 - w) \hat{\sigma}_2^2}. \quad (3)$$

ここで、 $w = (T_2 - 30/365)/(T_2 - T_1)$ である。

(2) 式では、(1) 式の積分を市場で取引されているオプション価格のみの総和で近似している。市場で取引されている権利行使価格は多くないので、それだけの総和で積分を近似すると近似誤差が大きくなる可能性がある。また、 K_1 を下回る権利行使価格と K_n を上回る権利行使価格を無視しているので、真のボラティリティを過小評価してしまう可能性がある。そこで、Jiang and Tian (2005) は、近似精度を上げるために、権利行使価格とそのオプション価格を補間および補外する方法を提案している。

3 VXJ と CSFI-VXJ の比較

本節では、CSFIが計算している補間および補外を行った CSFI-VXJ とそれらを行わない VXJ を比較することにより、補間および補外を行わない VXJ にどのようなバイアスが生じるのかを調べる。CSFI-VXJ の計算方法について、詳しくは、Fukasawa et al. (2011) を参照されたい。

図1は VXJ と CSFI-VXJ を図示したものであり、図2はそれらの差を図示したものである。また、表1に VXJ、CSFI-VXJ、およびそれらの差の記述統計量を計算している。Jiang and Tian (2007) によると、補間と補外を行った S&P500 の MFIV は、ほとんどの期間で、それらを行っていない VIX よりも高い値を示しており、このことは VIX に負のバイアスがあることを示している。それに対して、図2では、VXJ と CSFI-VXJ の差は正の時もあれば負の時もある。また、表1によると、平均は VXJ の方が CSFI-VXJ より高く、それらの差の平均は正になっている。補外を行わないと、 K_1 を下回る権利行使価格と K_n を上回る権利行使価格を無視することになるので、(1) 式の真の MFIV を過小評価することになる。それに対して、補間を行わないと、真の MFIV を過大評価する可能性もあれば過小評価する可能性もある。VXJ と CSFI-VXJ の差が正になっている時は、補間を行わないことによって MFIV が過大評価され、それが補外を行わないことによる MFIV の過小評価を上回っていることになる。

表 1: 記述統計量

サンプル期間：1998/1/5-2013/6/28, サンプル数: 3,807			
	(a) VXJ	(b) CSFI-VXJ	(a)-(b)
平均	26.48	26.16	0.32
標準偏差	9.02	9.43	1.04
最大値	91.45	97.27	4.71
最小値	11.52	10.97	-15.17

図2から、VXJ と CSFI-VXJ の差は負の時にその差が大きくなっていることがわかる。これは、表1で、VXJ と CSFI-VXJ の差の最大値が 4.71 とそれほど大きくないのに対して、最小値が -15.17 とかなり低い値になっていることからわかる。

4 まとめと今後の研究課題

本稿では CSFI が計算している VXJ と CSFI-VXJ を比較することにより、Jiang and Tian (2007) の結果と違い、補間および補外を行わない VXJ には正のバイアスがある時期もあれば、負のバイアスがある時期もあることを明らかにした。MFIV の計算方法の改良は現在も行われて

おり、例えば、Andersen and Bondarenko (2007)、Andersen et al. (2012) は、Corridor Implied Volatility と呼ばれる新たな計算方法を提案している。今後はそうした方法も検討する必要がある。

MFIV はアメリカでは盛んに研究が行われてきたが、近年、日本においても、MFIV の実証分析が行われるようになってきた。例えば、山口 (2011) は、日経平均の MFIV が将来のボラティリティの予測に有用であることを明らかにしている。また、(1) 式からわかるように、MFIV は危険中立測度 Q の下でのボラティリティなので、それと現実の測度の下でのボラティリティである Realized Volatility (RV) との差はボラティリティ・リスク・プレミアムと呼ばれる。Ubukata and Watanabe (2013) は、日経平均のボラティリティ・リスク・プレミアムがクレジット・スプレッドや景気一致指数の予測に有用であることを示している。今後はより精度の高い MFIV を用いてこうした MFIV やボラティリティ・リスク・プレミアムの実証分析をさらに深めていく必要がある。

参考文献

- Andersen, T. G. and Bondarenko, O. (2007), “Construction and Interpretation of Model-Free Implied Volatility,” *Volatility as an Asset Class*, Edited by I. Nelken, London: Risk Books, pp.141–181.
- Andersen, T. G., Bondarenko, O. and Gonzalez-Perez, M. T. (2012), “Uncovering Novel Features of Equity-Index Return Dynamics via Corridor Implied Volatility,” Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=1787528> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1787528>
- Fukasawa, M, Ishida, I., Maghrebi, N., Oya, K., Ubukata, M. and Yamazaki, K. (2011) “Model-Free Implied Volatility: From Surface to Index,” *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 14(4), 433–463
- Jiang, G. J. and Tian, Y. S. (2005), “The Model-Free Implied Volatility and Its Information Content,” *Review of Financial Studies*, 18(4), 1305–1342.
- Jiang, G. J. and Tian, Y. S. (2007), “Extracting Model-Free Volatility from Option Prices: An Examination of VIX Index,” *Journal of Derivatives*, 14(3), 35–60.
- Ubukata, M. and Watanabe, T. (2013), “Market Variance Risk Premiums in Japan as Predictor Variables and Indicators of Risk Aversion,” *Empirical Economics*, forthcoming.

杉原慶彦 (2010) 「我が国株式市場のモデル・フリー・インプライド・ボラティリティ」『金融研究』29(2), 73-120.

山口圭子 (2008) 「日経 225 株価指数のモデル・フリー・インプライド・ボラティリティの計算方法に関して：ボラティリティ予測力の観点から」『一橋経済学』3(1), 29-43.

図 1 : VXJ と CSFI-VXJ

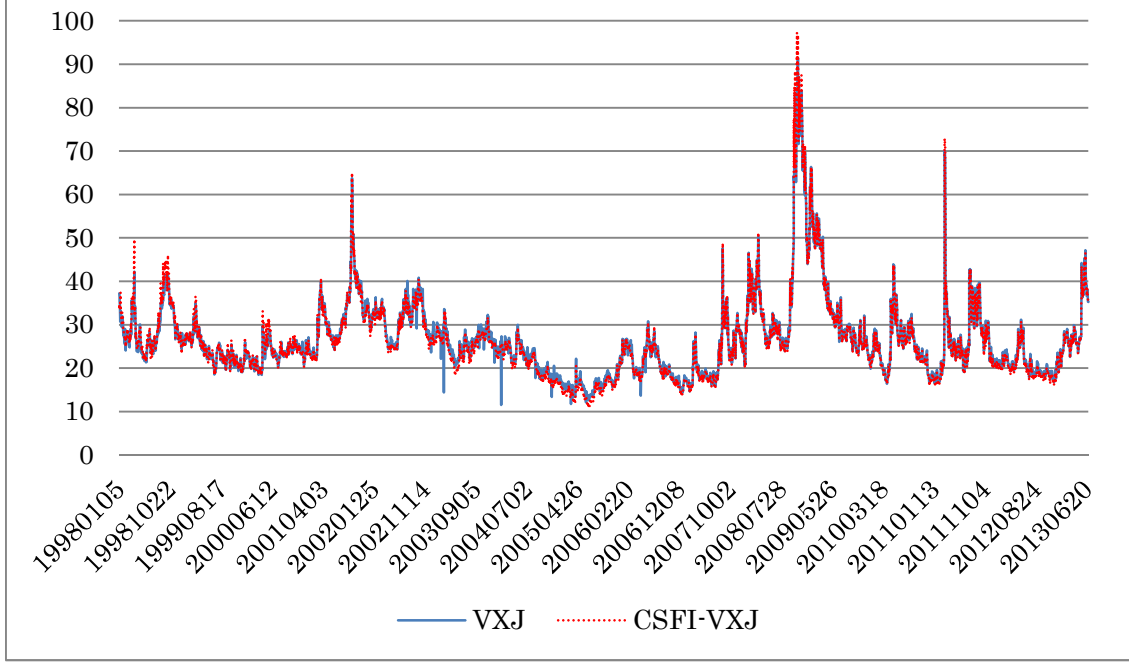


図 2 : VXJ と CSFI-VXJ の差

