ボラティリティ・インデックス先物のプライシング

大阪大学 金融・保険教育研究センター 石田 功

1. はじめに

先行する米国の VIX 先物に続き、日本でも大阪証券取引所に日経平均ボラティリティ・インデックス（VI）先物[1]が 2012 年 2 月に上場され、取引所ベースでの日本株式市場ボラティリティの取引が始まった。VI 先物が取引対象とするのは、日経平均 VI（日本経済新聞社が算出・公表）であり、理論価格算出は日経 225 先物等の株式指数先物ほど単純ではない。本稿では、VI 先物の理論価格算出方法のひとつである Zhang and Zhu (2006) の方法を紹介する。

2. ボラティリティ・インデックス先物のプライシング

日経平均 VI 先物が取引対象とする日経 VI は、所謂「モデルフリー・インプライド・ボラティリティ」の一種であるので、まず、このコンセプトについての簡単なレビューから始める[2]。

金融市場ボラティリティが時々刻々と変化していることは良く知られた実証的事実である。分析対象となる特定の金融市場指数（日経 VI の場合、言うまでもなく、日経平均株価）の各時点における瞬間的な変化率の分散をV_t（年率表示値）とすれば、向こうτ 期間（以下、時間単位はすべて年）の平均の期待値 $E_t^Q\left[\tau^{-1}\int_t^{t+\tau}V_s ds\right]$を、当該指数をアンダーラインングとするオプションの価格等から、ある理論式により計算することができる（$E_t^Q[\cdot]$は、実際の確率分布による期待値ではなく、資産評価の一般理論で用いられるリスク中立確率による期待値）。これは一種のオプション・インプライド・ボラティリティであるが、V_tが拡散過程に従い変動している限り、この理論式はV_tの特定の時間変動モデルに依存しないため、モデルフリー・インプライド・ボラティリティと呼ばれる。ただし、これはゼロから無限大まですべての行使価格のオプションが存在する等の理想的状況を仮定した場合の議論であり、実装においては、行使価格がある範囲で離散的にしか存在しない等の制約の中で高い近似精度を達成することが課題となる。米国 S&P 500 の VI である VIX の計算方法はその（平方根の）代表的な近似方法で、日経平均 VI や大阪大学金融・保険教育センターの VXJ も VIX と基本的に同様な計算方法を採用している。同センターの CSFI-VXJ は、独自の方法で近似精度の改善を行ったものである（Fukasawa et al. (2011)参照）。つまり、MFIV ベースの VI の t 点の値は、

$$VI_t \approx \sqrt{\tau^{-1}E_t^Q\left[\int_t^{t+\tau}V_s ds\right]} \tag{1}$$

となる。1 ヵ月物 VI 等においては通常、$\tau = 30/365$である。

日経 225 先物の場合、無裁定の議論により、期日 T の先物の t 時点における理論価格$FS_{T,t}^*$は、

---

[1] 取引制度の詳細については大阪証券取引所(2012)を参照のこと。

[2] 本シリーズでも渡辺(2007)、大屋(2009)、石田（2010, 2011）、仁科（2011）がボラティリティ・インデックスについて論じている。

$FS^*_{T,t} = e^{r(T-t)}S_t$となる（期日まで金利は一定、配当ゼロ等の単純化の仮定を置いた場合。ここで、S_tは t 時点の日経平均株価、rは金利）。先物の市場価格$FS_{T,t}$が理論価格$F^*_{T,t}$を上回れば（下回れば）先物を売り（買い）、現物株式を買い（売り）、満期までポジションを保有することにより、利益を確保できるからである。しかし、日経平均 VI 先物の場合は同様な議論が成り立たない。なぜならば、日経平均 VI 先物のアンダーライングである日経平均 VI は、日経平均構成銘柄株式と異なり、市場取引されている資産ではないからである。

日経平均 VI 先物も含め、期日 T の VI 先物の t 時点の理論価格$F^*_{T,t}$ は、より汎用的なリスク中立プライシングの理論[3]を用いて、次式により計算することができる。

$$F^*_{T,t} = E^Q_t\left[VI_T\right] \tag{2}$$

ここで、$E^Q_t[VI_T]$ は、期日 T における VI の値 VI_Tの期待値（現時点の VI の値VI_tによる条件付き期待値）である。前述の通り、一般には、$F^*_T = e^{rT}IV_t$とはならない。$E^Q[VI_T]$評価の一つの方法は、時々刻々とランダムに変化する瞬間ボラティリティV_t の何らかの連続時間確率過程モデルを想定し、それによって導かれるV_Tの確率分布、及び、V_tとVI_tの関係式を用いる方法である。株価指数等のボラティリティV_tにどのようなモデルを特定化し、どのように推論、予測を行うかについては確率・統計理論、市場データの実証分析ともに膨大な文献がある（例えば、Andersen et al. (2009) に収められた多数のサーベイ論文を参照のこと）。Zhang and Zhu (2006) は、筆者の知る限り、(1)、(2)の関係に着目し、VI 先物の理論価格と実際の市場価格の比較を行った最初の学術論文である。彼らは、V_tが従う確率過程として、ボラティリティ確率変動及び長期平均への回帰傾向を捉る Heston 確率ボラティリティ・モデル

$$dV_t = \kappa\left(\theta - V_t\right)dt + \sigma_V\sqrt{V_t}\,dB_t \tag{3}$$

(ここで、$\{B_t\}$ はブラウン運動。θ, κ, σ_Vはそれぞれ分散の長期平均、平均回帰速度、分散のボラティリティを表すパラメータ)を仮定し、その場合にV_t 変動がリスク中立確率の下で従う確率過程のモデルとしてよく用いられる次式

$$dV_t = \left(\kappa\theta - \left(\kappa + \lambda\right)V_t\right)dt + \sigma_V\sqrt{V_t}\,dB^Q_t \tag{4}$$

を特定化した（ここで、$\{B^Q_t\}$ はリスク中立仮定の下でブラン運動となる確率過程、λはボラティリティ・リスク・プレミアムと解釈されるパラメータ）。この場合、石田(2011)において、Heston モデルを特殊ケースとして含む CEV モデルの文脈でも紹介したとおり、

$$\tau^{-1}E^Q_t\left[\int_t^{t+\tau} V_s ds\right] = a + bV_t, \quad b = \frac{1-e^{-\kappa^*\tau}}{\kappa^*\tau}, \quad a = \frac{\phi}{\kappa^*}\left(1-b\right), \quad \kappa^* := \kappa + \lambda, \quad \phi := \kappa\theta \tag{5}$$

となるので、(1)を厳密な式として扱えば、フォワード・ルッキングな VI の 2 乗は現時点の瞬間分散の 1 次関数

$$VI_t = a + bV_t \tag{6}$$

となり、その切片 a、係数 b は瞬間分散変動式(3), (4)のパラメータの関数として明示的に表現される。

[3] リスク中立プライシングの平易な解説としては、小林・芹田(2009, 第 5 章)がある。

金融工学において、Heston モデルやその拡張版が、他の平均回帰的な確率変動ボラティリティ・モデルと比較してこれまで多用されてきた主要な理由は、その解析的な扱い安さにある（例えば原資産価格の瞬間分散が Heston モデルに従っておれば、いくつかの追加的仮定の下で、ヨーロピアン・オプション理論価格の準解析的な公式が得られる。Heston (1993)、または、本シリーズの三井(2012)を参照のこと）。V_t で条件付けたV_T の条件付リスク中立確率密度は

$$f^Q\left(V_T \mid V_t\right) = 2c\chi^2\left(2cV_T; 2q+2, hV_t\right), \quad c = \frac{2\kappa^*}{\sigma_V^2\left(1-e^{-\kappa^*(T-t)}\right)}, q = \frac{2\phi}{\sigma_V^2} - 1, h = 2ce^{-\kappa^*(T-t)} \tag{7}$$

（ここで、$\chi^2(\cdot; c_1, c_2)$は自由度c_1、非心パラメータc_2 の非心カイ二乗分布の密度関数）となるので、VI 先物理論価格は

$$F_{T,t}^* = E_t^Q\left[VI_T\right] = E_t^Q\left[\sqrt{a+bV_T}\right] = \int_0^\infty \sqrt{a+bV_T}\, f^Q\left(x \mid V_t\right)dx \tag{8}$$

となり、右辺の計算を数値積分により行うにせよ、容易に計算できる。

もちろん、(8)式による VI 先物理論価格の計算においては(4)式のパラメータの値を知る必要があるが（ただし、評価式(8)において κ, θ, λ は $\kappa^* := \kappa + \lambda,\ \phi := \kappa\theta$ の形でしか現れないので、個々の値ではなく$\kappa + \lambda,\ \kappa\theta$ の値が分かれば十分である）、金融工学の他の分野においてと同様に、未知パラメータは、前述の通り株価指数や株価指数オプション、さらには VI や VI 先物の時系列データを用いて統計的に推定しても良いし、異なる限月の VI 先物の市場価格クロスセクション・データを用いてキャリブレーションの方法で求めても良い。

株価指数とその VI の日次時系列データによるV_t変動モデルのパラメータの推定としては、例えば、S&P500 と VIX データによる Duan and Yeh (2010)や、その手法を日経平均株価と VXJ データに応用した本シリーズの石田(2011)があるが、これらの論文で用いられた推定方法は日次の推移確率を正規分布で近似した疑似最尤法であった。Heston モデルを仮定する場合は、(7)式と同様に、日次の（リスク中立確率の下でのものではなく現実の）推移確率密度 $f(V_{t+\Delta t}|V_{\Delta t})$、 よって、$f(VI_{t+\Delta t}^2|VI_t^2)$ もパラメータ（及び日次 VI 値）の関数として明示的に表現できるので、VI 日次観測系列のみによる$\kappa, \theta, \lambda, \sigma_V$の最尤推定量

$$\left(\hat{\kappa}, \hat{\theta}, \hat{\lambda}, \hat{\sigma}_V\right) = \underset{(\kappa,\theta,\lambda,\sigma_V)}{\operatorname{argmax}} \sum_t \ln f\left(VI_{t+\Delta t}^2 \mid VI_t^2\right) \tag{9}$$

が容易に得られる。また、(8)式よる VI 先物の理論価格の評価においては、レバレッジと呼ばれる株価指数とそのボラティリティの相関のパラメータの推定は不要であり、$\kappa, \theta, \lambda, \sigma_V$ のみで十分である。Zhang and Zhu (2006) は、日次 VIX 時系列データを用いた(9)によるパラメータ推定を行い、λ の推定精度が低いこと、また、パラメータ推定値を(8)式にプラグインして得られた 2005 年 3 月 1 日の VIX 先物（4 限月）の理論価格と市場価格の乖離の二乗平均は、推定に直近 1 年の標本を用いた場合の方がより長い時系列を用いた場合よりも小さかったことを報告している（Zhang and Zhu (2006)は、後者の原因は、V_tの長期平均が、Heston モデルにおける θ のように固定ではなく、時間的にシフトしていることにある可能性を指摘している）

キャリブレーションでは、ひとつの時点 t において同時に取引されている異なる限月の VI 先物市場価格のクロスセクション・データを用いて、例えば、Zhang and Zhu (2006) に従い、

$$\left(\hat{\kappa}^*,\hat{\phi},\hat{\sigma}_V\right)=\underset{\left(\kappa^*,\phi,\sigma_V\right)}{\operatorname{argmin}}\sum_{T}\left(F_{T,t}^*-F_{T,t}\right)^2 \tag{10}$$

（T は残存期間。t が同じでも限月ごとに異なる）により求めても良いし、パネルデータを用いて

$$\left(\hat{\kappa}^*,\hat{\phi},\hat{\sigma}_V\right)=\underset{\left(\kappa^*,\phi,\sigma_V\right)}{\operatorname{argmin}}\sum_{T,t}\left(F_{T,t}^*-F_{T,t}\right)^2 \tag{11}$$

により求めても良い。ただし、Heston モデルを用いたキャリブレーションでは、4 つの未知パラメータうち κ,θ,λ は $\kappa^*\coloneqq\kappa+\lambda,\ \phi\colon=\kappa\theta$ としてしか(8)式に現れないので、すべては個別には識別できず、κ^*,ϕ としてのみ推定できる。得られたパラメータの値は、仮定した Heston モデルの標本内フィットを調べることにも、標本外のプライシングにも用いることができる。

3. 日経VIデータへの応用

次に、本格的な実証分析とは言い難いが、期近ものから4つの限月の日経平均VI先物（残存日数はそれぞれ 20、48、76、111）と日経VIの 11 月 22 日終値（本稿執筆時における最新の値）を用いて、(10)式の方法によりパラメータを推定した結果を報告する。

得られたパラメータ推定値は $\hat{\kappa}^*=0.603,\ \hat{\phi}=5.536,\hat{\sigma}_V=4.240$ であった。もし、V_t の長期平均パラメータ θ の値を 0.048 （株式指数変化率の標準偏差で約年 22％に相当）に設定すれば $\kappa=12.457,\lambda=-6.921$ となり、多くの実証分析で報告されている通り、ボラティリティ・リスク・プレミアム λ の値は負の値となる。プライシング・エラー（$F_{T,t}^*$-$F_{T,t}$）は期近ものから順に 0.334, -0.231, -0.507, 0.447 であった。

4. 最近のモデル改良研究の動向とまとめ

本稿では、多くの VI 先物の理論価格算出方法として、Heston 確率ボラティリティ・モデルをベースとする Zhang and Zhu (2006)の方法を紹介した。多くの実証研究で、Heston モデルは、株価ボラティリティのモデルとしては株価・オプション価格データへの適合度において改善の余地が大きいことが示され、その後、多くの拡張モデルとそのパラメータ推定の方法が提唱されてきた。VIデリバティブ評価の方法論・実証分析も、VIX デリバティブ市場の発展に触発され、株価ボラティリティの時系列モデル推定や株式オプションの評価の方法論における最近の成果を反映する形で急速に発展しつつある。一例を紹介すると、Lin (2007) は、Eraker (2004)の株価過程とその確率変動ボラティリティ過程の両方にジャンプが起こるタイプのモデルを仮定しても、VI_t と瞬間分散 V_t の関係は、ジャンプ項を規定するパラメータも含むより複雑な関係になるものの線形性は維持されることを示し、線形関係の切片項 a、係数 b をパラメータの明示的な関数として導出した。よって、Heston モデルを仮定した場合の VI 評価式(8)も成立する（もちろん、$a,b,f^Q(V_T|V_t)$ の内容は変わる）。Lin (2007)は、(8)式最右辺を直接評価するのではなく、$E_t^Q[VI_T^2],\ Var_t^Q[VI_T^2]$ のパラメータの明示的な関数としての表現を示した上で、近似式

$$F_{T,t}^{*} = E_t^Q\left[VI_T\right] \approx \sqrt{E_t^Q\left[VI_T^2\right]} - \frac{Var_t^Q\left[VI_T^2\right]}{8\left(E_t^Q\left[VI_T^2\right]\right)^{3/2}} \tag{12}$$

（第 2 項はイェンゼンの不等式の調整項）を用いた VIX 先物プライシングの分析を行った。

大阪証券取引所における日経VI先物の取引はまだ日が浅いが、この市場の発展のためにはプライシングやヘッジの実用的な手法の整備が欠かせない。現在のところ、日経VI先物取引自体のヒストリカル・データの蓄積の期間は短いが、これまでの日経平均ボラティリティや日経 225 オプション市場に関する実証研究成果を活かした日経VI先物取引の実証研究の展開が期待されるところである。

参考文献

石田 功（2010）「日本版ボラティリティ・インデックスVXJの時系列特性」 大阪証券取引所先物・オプションレポート 22 (6).

石田 功（2011）「ボラティリティ指数を利用した確率ボラティリティ・モデルの推定」 大阪証券取引所先物・オプションレポート 23 (10).

大阪証券取引所（2012）「日経平均ボラティリティ・インデックス先物取引」（2012 年 2 月版パンフレット）.

大屋幸輔（2009）「日本版モデルフリー・ボラティリティ・インデックス」 大阪証券取引所先物・オプションレポート 21 (10).

小林孝雄，芹田敏夫 (2009)『新証券投資論』日本経済新聞社.

仁科一彦（2011）「デリバティブ市場からのメッセージ」 大阪証券取引所先物・オプションレポート 23 (5).

三井秀俊 (2012)「連続時間確率的分散変動オプション価格の閉じた解の考察」大阪証券取引所先物・オプションレポート 24 (8).

渡部敏明（2007）「モデル・フリー・インプライド・ボラティリティ」大阪証券取引所先物・オプションレポート 19 （12）.

Andersen, T.G., Davis, D.A., Kreiss, J., and Mikosch, T., eds. (2009). *Handbook of Financial Time Series.* Springer.

Eraker, B. (2004). Do stock prices and volatility jump? Reconciling evidence from spot and option prices. *Journal of Finance* 59, 1367-1403.

Duan, J.-C., and Yeh, C.-Y. (2010). Jumps and volatility risk premiums implied by VIX. *Journal of financial time series* 34, 2232-2234

Masaaki F., Ishida, I., Maghrebi, N., Oya, K., Ubukata, M., and Yamazaki, K. (2011). Model-free implied volatility: From surface to index, *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 14, 433-463.

Heston, S. (1993). Closed-form solution for options with stochastic volatility, with application to bond and currency options. *Review of Financial Studies* 6, 327-343.

Lin, Y.-N. (2007). Pricing VIX futures: Evidence from integrated physical and risk-neutral probability measures. Journal of Futures Markets 27, 1175-1217.

Zhang, E., and Zhu, Y. (2006). VIX futures. *Journal of Financial Markets* 26, 521-531.