

原資産価格のブル・ベアを考慮した日経 225 オプション価格の分析*

東洋大学経営学部准教授 里吉清隆

日本大学経済学部准教授 三井秀俊

1. はじめに

近年のオプション市場での実証研究では、ボラティリティの時系列的変動をどのように定式化してオプション価格を評価すればよいか非常に重要な問題となっている。ARCH モデルを始めとしたボラティリティ変動モデルの研究では、一般に、ボラティリティに対するショックの持続性が非常に高いことが知られている。しかし、Diebold (1986) と Lamoureux and Lastrapes (1990) が指摘しているように、このような持続性はボラティリティの構造変化によって引き起こされた可能性が考えられる。このことから、Hamilton and Susmel (1994) と Cai (1994) は、構造変化を捉えるために ARCH モデルの定式化にマルコフ連鎖に従う状態変数を含めたマルコフ・スイッチング ARCH (markov-switching ARCH; MSARCH) モデルを提案した。さらに、Gray (1996) は ARCH モデルではなく GARCH モデルに構造変化を含めたマルコフ・スイッチング GARCH (markov-switching GARCH; MSGARCH) モデルに拡張した。MSGARCH モデルはその後、Klaassen (2002)、Haas et al. (2004) によって改良が加えられた。

Satoyoshi and Mitsui (2011) は Gray (1996) の MSGARCH モデルを用いて日経 225 オプションに関する実証分析を行ない、コール・オプションの評価では、誤差項に正規分布より裾の厚い t 分布を仮定した MSGARCH モデルのパフォーマンスは、従来の GARCH モデルや Black and Scholes (1973) モデルより優れているという結果を得た。しかし、ここでは期待収益率を定数として収益率の式を定式化しており、以前から多くの研究で指摘されている分布の歪みについては全く考慮していない。原資産価格である日経 225 株価指数は、長期のデータを観察すると上昇トレンドの時期（ブル）と下降トレンドの時期（ベア）があることが見て取れる。このようなブル・ベアを期待収益率のスイッチングでモデル化することにより、左右対称でない収益率の分布の歪みを表現できる可能性がある。また、株価が上昇した翌日のボラティリティよりも下落した翌日のボラティリティの方が高くなるという、いわゆるボラティリティの非対称性は日経 225 株価指数において以前から観察されており、そのような変動特性を捉えた EGARCH モデルのほうが、GARCH モデルよりもオプション評価の点で優れていることが見込まれる。GARCH モデルよりもスイッチングを含めた MSGARCH モデルのほうがオプション評価が優れていること、また、ボラティリティの非対称性が観察されていることなどを踏まえて考えると、EGARCH モデルにスイッチングを含めたマルコフ・スイッチング EGARCH (MSEGARCH) モデルがオプション評価においてパフォーマンスが高い可能性がある。

本研究では、原資産のボラティリティだけでなく、期待収益率もマルコフ・スイッチングを起こす EGARCH モデル、すなわち MSEGARCH モデルを用いて日経 225 オプション価格の評価を行ない、他のモデルに比べてパフォーマンスが高いか検証を行なうことにする。

2. モデル

原資産価格の t 時点の収益率を R_t とすると、MSEGARCH モデルは次のように表される。

$$R_t = \mu_a + \sqrt{V_{ab,t}}z_t,$$

$$z_t \sim i.i.d., E[z_t] = 0, V[z_t] = 1,$$

$$\ln(V_{ab,t}) = \omega_b + \beta \ln(V_{ab,t-1}) + \theta \left[\frac{R_{t-1} - \mu_a}{\sqrt{V_{ab,t-1}}} \right] + \gamma \left[\left| \frac{R_{t-1} - \mu_a}{\sqrt{V_{ab,t-1}}} \right| - E[|z_{t-1}|] \right],$$

$$\mu_a = \mu_1 \Delta_{1t} + \mu_2 \Delta_{2t}, \quad \mu_1 < \mu_2,$$

$$\omega_b = \omega_1 \Gamma_{1t} + \omega_2 \Gamma_{2t}, \quad \omega_1 < \omega_2.$$

ここで、ボラティリティ $V_{ab,t}$ は、2つの状態変数 Δ_t, Γ_t と、 $t-1$ 時点までの情報集合 $I_{t-1} = \{R_{t-1}, R_{t-2}, \dots\}$ を条件とした R_t の条件付き分散、つまり $V_{ab,t} = V[R_t | \Delta_t = a, \Gamma_t = b, I_{t-1}]$ である。

*本研究で使用した日経 225 オプションのデータは大阪証券取引所から提供して頂いた。また、本研究の詳細な研究方法・研究結果に関しては、里吉・三井 (2011) を参照して頂きたい。

Δ_t と Γ_t の推移確率は,

$$\Pr[\Delta_t = j | \Delta_{t-1} = i] = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2,$$

$$\Pr[\Gamma_t = l | \Gamma_{t-1} = k] = q_{kl}, \quad k, l = 1, 2,$$

$$\sum_{j=1}^2 p_{ij} = \sum_{l=1}^2 q_{kl} = 1$$

とする．誤差項の分布には標準正規分布 $z_t \sim i.i.d.N(0, 1)$ と t 分布 $z_t \sim i.i.d.t(0, 1, \nu)$ の両方を考える．ただし, ν は自由度であり, z_t の分散は 1 に基準化されている．以下では, MSEGARCH モデルを MSEG モデルと略して, 誤差項が正規分布に従うモデルを MSEG-n モデル, 誤差項が t 分布のモデルを MSEG-t モデルと呼ぶことにする．本研究では, 上記の MSEG モデルだけでなく, 定式化の異なるいくつかのボラティリティ変動モデルも併せて, オプションの評価を行なう．本研究で比較するボラティリティ変動モデルと BS モデルをまとめると以下ようになる．

- [1] MSEG-n, MSEG-t
- [2] MSEG-c-n, MSEG-c-t (ボラティリティのみスイッチングを起こす EGARCH モデル)
- [3] MSG-n, MSG-t (期待収益率とボラティリティがスイッチングを起こす GARCH モデル)
- [4] MSG-c-n, MSG-c-t (ボラティリティのみがスイッチングを起こす GARCH モデル)
- [5] EGARCH-n, EGARCH-t
- [6] GARCH-n, GARCH-t
- [7] BS モデル (Black and Scholes (1973))

3. オプション価格の導出

投資家がリスク中立的な場合, ヨーロピアン・オプションの価格は, 満期におけるオプション価格の期待値を無リスク資産の利率 r で割り引いた割引現在価値となる．すなわち, $T + \tau$ 時点が満期で権利行使価格 K のコール・オプションの T 時点の価格を C_T , プット・オプションの価格を P_T とすると,

$$C_T = (1 + r)^{-\tau} E [Max (S_{T+\tau} - K, 0)],$$

$$P_T = (1 + r)^{-\tau} E [Max (K - S_{T+\tau}, 0)]$$

と表される．ここで, $S_{T+\tau}$ はオプションの満期の原資産価格である．本研究では, 無リスク資産の利率 r は原資産の期待収益率 μ_a と等しくなるように変動すると仮定している．したがって, T 時点から満期である $T + \tau$ 時点までの利率は, 状態変数 Γ_t に従って, μ_1, μ_2 の値をとることになる．MSEG モデルの場合, 右辺の期待値を解析的に求めることができないので, モンテカルロ・シミュレーションによって評価する．

4. 実証結果

4.1 データ

本研究の実証分析に用いたオプションは, 2007 年 6 月限月から 2010 年 1 月限月までの日経 225 コール・オプション, ならびにプット・オプションである (32 限月)．これらのオプションの満期から営業日ベースで 20 日前 ($\tau = 20$) の終値と 30 日前 ($\tau = 30$) の終値を分析対象とした¹⁾． $\tau = 20$ のとき, コールとプットの標本数はそれぞれ 524, 584, $\tau = 30$ のときは 495, 539 となった．また, 基本的な仮定として, 取引費用, 税金, 配当は存在せず, オプションの証拠金は不要とした．BS モデルの計算に必要な無リスク資産の利率のデータには, 無担保コール翌日物を用いた．

MSEG-n モデルなどのボラティリティ変動モデルのパラメータの推定には, 満期の 20 日前, もしくは 30 日前から更に 3,500 日前までの日経 225 株価指数の終値を使用した²⁾．例えば, 満期から 20 日前のケースで最初の限月である 2007 年 6 月限月の場合, オプションの評価日は満期から 20 日前の 2007 年 5 月 11 日, その 3,500 日前は 1993 年 2 月 24 日になる．日次収益率を計算することにより, 標本期間は 1993 年 2 月 25 日

¹⁾日経 225 オプション終値と日経 225 株価指数終値とが異時点では値付けされている可能性があるが, 本研究では考慮しなかった．

²⁾日経 225 株価指数 (日経平均) のデータは, 日経 NEEDS-FinancialQUEST を利用した．また, パラメータの推定には, プログラミング言語である OxMetrics 5.00 (<http://www.oxmetrics.net/>) を利用した．

表 1: MSEG-t モデルの推定結果

	p_{11}	p_{22}	q_{11}	q_{22}	μ_1	μ_2	ω_1	ω_2	β	θ	γ	ν
推定値	0.996	0.992	0.989	0.923	-0.052	0.115	0.001	0.038	0.986	-0.104	0.068	19.248
標準誤差	0.002	0.005	0.004	0.027	0.021	0.030	0.003	0.009	0.003	0.012	0.016	7.276

から 2007 年 5 月 11 日までとなり（標本の大きさは $T = 3,500$ ），この期間の日次収益率を用いてモデルのパラメータの推定を行ない，その推定されたパラメータを所与として，モンテカルロ・シミュレーションによってオプション価格を求める．次の限月以降も同様にして計算を行なう．満期から 30 日前のケースでは，最初の限月（2007 年 6 月限月）の評価日から 3,500 日前は 1993 年 2 月 9 日であり，その翌日の日次収益率からのデータを用いることになる．

4.2 モデルの推定結果

表 1 には，MSEG-t モデルの推定結果を示した．日次収益率の標本期間は，1993 年 2 月 10 日から最後の限月（2010 年 1 月限）の満期日である 2010 年 1 月 8 日までである．期待収益率 μ_1, μ_2 の推定値は $-0.052, 0.115$ であり，マイナスとプラスの値に分かれた．このことから，状態変数 Δ_t が $\Delta_t = 1$ のとき日経平均はベア， $\Delta_t = 2$ のときはブルであるということが出来る． Δ_t の推移確率 p_{11}, p_{22} の推定値はそれぞれ 0.996, 0.992 であり，どちらも 1 に非常に近い．したがって，一度ブルまたはベアにスイッチングを起こすと，その状態が長く続くことが分かる．このような推移確率の高さは，期待収益率がスイッチングする他のモデル，MSEG-n モデル，MSG-n モデル，MSG-t モデルでは観察されなかった．一方，2 つ目の状態変数 Γ_t の推移確率 q_{11}, q_{22} の推定値はそれぞれ 0.989, 0.923 となっている．このパラメータはボラティリティの持続性のうち，スイッチングで説明される部分の持続性を示している． $q_{11} > q_{22}$ であることから，一度ロー・ボラティリティ ($\Gamma_t = 1$) にスイッチングするとその状態が長く続くが，ハイ・ボラティリティ ($\Gamma_t = 2$) の状態はあまり長く続かないと考えられる．このモデルの EGARCH 部分で表されるボラティリティの持続性パラメータは β であり，その推定値は 0.986 となっている．また，非対称性を表すパラメータ θ の推定値は -0.104 で有意であり，これらの結果は通常の EGARCH モデルと同じである．

図 1 にはブル ($\Delta_t = 2$) になる確率を示した．この確率は全てのデータが与えられたもとで計算されている．どの期間をブルとするか，またはベアとするかはそもそも定義が曖昧であり難しい問題ではあるが，グラフを見る限り，このモデルを使うと概ねブル・ベアを捉える事ができていると考えられる．因みに，期待収益率がスイッチングする他のモデル (MSEG-n, MSG-n, MSG-t) では，このようにブル・ベアを示すようなグラフにはならなかった．図 2 はハイ・ボラティリティ ($\Gamma_t = 2$) になる確率であり，ハイ・ボラティリティの状態は長く続かないことが分かる．また，図 1 のブル・ベアとは明らかにスイッチングの時期が異なっており，ブル・ベアとハイ・ボラティリティ，ロー・ボラティリティの両方を捉えるには，マルコフ連鎖に従う状態変数は 1 つではなく 2 つ必要であると考えられる．

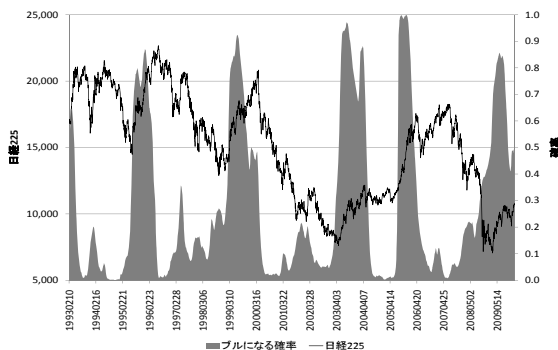


図 1: ブルになる確率

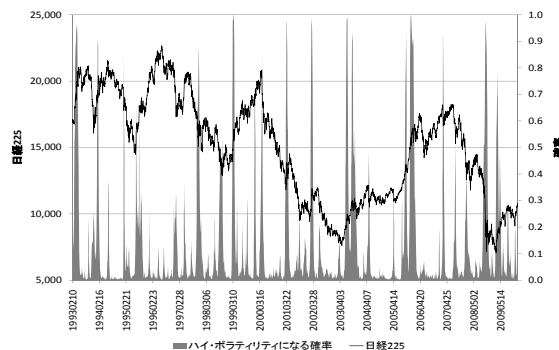


図 2: ハイ・ボラティリティになる確率

4.3 オプション価格の推定値の比較

2節で示した12種類のボラティリティ変動モデルとBSモデルによるオプション価格の推定値と実際の市場価格を用いて、以下のように平均誤差率 (mean error rate; MER) と平均2乗誤差率 (root mean squared error rate; RMSER) を計算し、各モデルの比較を行なう。

$$\text{MER} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\hat{X}_i^{\text{推定値}} - X_i^{\text{市場価格}}}{X_i^{\text{市場価格}}} \right), \quad \text{RMSER} = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\hat{X}_i^{\text{推定値}} - X_i^{\text{市場価格}}}{X_i^{\text{市場価格}}} \right)^2}, \quad X = C, P.$$

ここで、 $\hat{X}_i^{\text{推定値}}$ はモンテカルロ・シミュレーションによるオプションの推定値、或は、BSモデルの理論価格を表し、 $X_i^{\text{市場価格}}$ はオプションの市場価格、 C はコール・オプションの価格、 P はプット・オプションの価格を表す。 m は標本数である。MERの値を計算することにより、モデルの推定値が市場価格と比べてどの程度プラス、またはマイナス方向にバイアスを持っているかが明らかになる。もう1つのRMSERは、推定値と市場価格の乖離度を示す基準である。

表 2: オプション価格の推定値の比較

MER							
	MSEG		MSEG-c		MSG		標本数
	n	t	n	t	n	t	
コール (20 日前)	-0.092	-0.127	-0.201	-0.188	0.665	0.978	524
コール (30 日前)	-0.169	-0.166	-0.294	-0.224	0.841	1.208	495
プット (20 日前)	-0.414	-0.392	-0.384	-0.406	-0.501	-0.489	584
プット (30 日前)	-0.446	-0.416	-0.421	-0.416	-0.545	-0.554	539

	MSG-c		GARCH		EGARCH		BS	標本数
	n	t	n	t	n	t		
コール (20 日前)	0.690	0.762	1.487	1.541	-0.299	-0.259	1.093	524
コール (30 日前)	0.887	1.081	1.672	2.263	-0.298	-0.267	1.768	495
プット (20 日前)	-0.520	-0.524	-0.519	-0.503	-0.438	-0.435	-0.474	584
プット (30 日前)	-0.587	-0.580	-0.580	-0.538	-0.455	-0.453	-0.506	539

RMSER							
	MSEG		MSEG-c		MSG		標本数
	n	t	n	t	n	t	
コール (20 日前)	0.705	0.570	0.558	0.630	1.747	2.717	524
コール (30 日前)	0.689	0.546	0.573	0.622	2.583	3.060	495
プット (20 日前)	0.553	0.547	0.528	0.551	0.642	0.629	584
プット (30 日前)	0.563	0.546	0.544	0.533	0.667	0.668	539

	MSG-c		GARCH		EGARCH		BS	標本数
	n	t	n	t	n	t		
コール (20 日前)	1.751	2.047	5.606	5.091	0.532	0.543	4.866	524
コール (30 日前)	1.945	2.324	4.807	6.322	0.612	0.612	6.868	495
プット (20 日前)	0.649	0.656	0.654	0.641	0.589	0.577	0.662	584
プット (30 日前)	0.687	0.681	0.682	0.646	0.581	0.567	0.678	539

コール・オプションの結果 満期から20日目のMERの結果を見てみると、MSEG-nモデルの値が-0.092であり、全てのモデルの中でオプション価格の推定値の上方または下方バイアスが最も小さい。その次がMSEG-tモデルであり、これらのMSEGモデルは、他のモデルよりもMERの基準で優れていることが分かる。また、MSGモデル、MSG-cモデル、GARCHモデル、BSモデルの値は非常に悪く、EGARCHモデルの値は比較的良い。RMSERの基準では、EGARCH-nモデルを用いたとき推定値と市場価格の乖離率が最も小さく(0.532)、その次はEGARCH-tモデルとなっている。MSEGモデル、MSEG-cモデルの値も比較的良いが、従来のEGARCHモデルには僅かに及ばない。また、この基準でもMSGモデル、MSG-cモデル、GARCHモデル、BSモデルの値は非常に大きい。以上のMER、RMSERの結果から、スイッチングを考える以前に、少なくともボラティリティの変動を表す式にはEGARCHモデルを含める必要があることが分かる。満期から30日目の結果では、MERのMSEG-tモデルの値が-0.166であり、全てのモデルの中

でオプション価格の推定値のバイアスが最も小さい。その次が MSEG-n モデルであり、MSEG モデルは他のモデルよりも MER の基準で優れている。また、20 日前と同様に MSG モデル、MSG-c モデル、GARCH モデル、BS モデルの値は非常に悪い結果となっている。次に RMSER であるが、ここでも MSEG-t モデルの結果が 0.546 と最も良くなっている。MER と RMSER のどちらの基準でも MSEG-t モデルの優位性が示されたことになり、満期 20 日前とは異なる結果となった。4.2 で見たように MSEG-t モデルはブル・ベアを捉えることができる唯一のモデルである。満期からの期間が 20 日から 30 日に長くなったために、ブル・ベアの予測の効果が出た可能性がある。

プット・オプションの結果 満期から 20 日前の計算結果は、全体的にほぼ同じ値になっているが、MSEG-c-n モデルは MER が -0.384 、RMSER が 0.528 であり、両方の基準において最も小さい値となっている。満期から 30 日前では、MER が最も小さいのは MSEG-t モデルと MSEG-c-t モデル、RMSER が最も小さいのは MSEG-c-t モデルとなった。ここでも 20 日前と同様に各モデルの値は大きく異なっていない。プットでは、満期までの長さにかかわらず、全体的に見てボラティリティのみがスイッチングを起こす MSEG-c モデルのほうが若干良い値になっている。

5. 結論

本研究で得られた主な結果をまとめると次のようになる。

- [1] 原資産価格のブル・ベアは、MSEG-t モデルによってのみ捉えることができる。
- [2] 満期から 20 日前のコール・オプションでは、MER の基準で MSEG-n モデル、RMSER の基準で EGARCH-n モデルが選択されるが、満期までの期間を 30 日にすると、どちらの基準においても MSEG-t モデルのパフォーマンスが最も優れている。したがって、満期までの期間が長いコール・オプションでは、ブル・ベアを捉えることができるモデルで評価を行ったほうが良いと考えられる。
- [3] プット・オプションでは、満期までの長さにかかわらずボラティリティのみがスイッチングを起こす MSEG-c モデルのパフォーマンスが若干良いという結果になり、原資産価格のブル・ベアを考慮する必要はない。
- [4] 原資産価格収益率とボラティリティとの非対称性を踏まえた定式化、誤差項の分布、期待収益率とボラティリティがマルコフ・スイッチング過程に従うという仮定は、オプション価格の評価において非常に重要である。

参考文献

- [1] 里吉清隆・三井秀俊 (2011). 「原資産価格のブル・ベアを考慮したオプション価格付けの実証研究」. 日本大学経済学部産業経営研究所『産業経営研究』, 第 33 号, 掲載予定.
- [2] Black, F. & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81, 637-654.
- [3] Cai, J. (1994). A Markov Model of Switching-Regime ARCH. *Journal of Business & Economic Statistics*, 12, 309-316.
- [4] Diebold, F. X. (1986). Modeling the Persistence of Conditional Variances: A Comment. *Econometric Reviews*, 5, 51-56.
- [5] Gray, S. F. (1996). Modeling the Conditional Distribution of Interest Rates as a Regime-Switching Process. *Journal of Financial Economics*, 42, 27-62.
- [6] Haas, M., Mittnik, S. & Paolella, M. S. (2004). A New Approach to Markov-Switching GARCH Models. *Journal of Financial Econometrics*, 2, 493-530.
- [7] Hamilton, J. D. & Susmel, R. (1994). Autoregressive Conditional Heteroskedasticity and Changes in Regime. *Journal of Econometrics*, 64, 307-333.
- [8] Klaassen, F. (2002). Improving GARCH Volatility Forecasts with Regime-Switching GARCH. *Empirical Economics*, 27, 363-394.
- [9] Lamoureux, C. G. & Lastrapes, W. D. (1990). Persistence in Variance, Structural Change, and the GARCH Model. *Journal of Business & Economic Statistics*, 8, 225-234.
- [10] Satoyoshi, K., & Mitsui, H. (2011). Empirical Study of Nikkei 225 Options with the Markov Switching GARCH Model. *Asia-Pacific Financial Markets*, forthcoming.