個別証券会社の日経平均株価予想確率分布の推定

明海大学　経済学部
准教授　新井啓

1. はじめに

本レポートは新井［2007］，［2009a］，［2009b］，［2010a］，［2010b］，［2010c］，［2010d］の一連の研究で派生的に研究対象とした個別取引者の予想価格分布の推定に関するレポートである．ファイナンス論のみならず，経済学のゲーム理論においても経済学上の均衡を得るために予想の分布が重要となるが，取引者の予想の分布を推定することはあまり行われていないようである．本稿の経済モデルにおいて期待値は直接的に推定することは可能であるが，予想価格分布の分散は直接的に推定することは不可能であり，間接的な推定となってしまうが，シミュレーション的な数値計算で予想価格分布の分散を求めている．そのため分散の推定としてはまだ不十分なものとなっているが，今後の研究を進めるうえでの一助となるものであるために，今回報告することとした．

2. 計測モデル

新井[2009a]で展開されたモデルに従って話を進めるために，昨年の本レポートにおいても展開したモデルを改めてこの節で述べることとする．負の指数型効用関数を前提として来期の予想利潤（あるいは富）についての期待効用の最大化から先物（あるいは金融資産）に対する超過需要関数が導かれ，ある証券会社を通じて H 人の取引者が取引をしているとする．その H 人の取引者の建玉合計は，

$$\sum_{k=1}^{H} X_{kt} = \sum_{k=1}^{H} \alpha_k (\bar{p}_{k,t+1} - p_t)$$

となる．ここで α_k は第 k 取引者の危険回避度や将来の日経平均株価の予想の分布の特徴に依存する値であり， X_{kt} ：t 期（t 時点）における第 k 取引者の先物契約保有枚数， $\bar{p}_{kt}$ を t 時点における第 k 取引者の先物価格予想の期待値， p_t を t 時点の先物価格とすると，左辺の $\sum_{k=1}^{H} X_{kt}$ が日本経済新聞に掲載される証券会社別の建玉数に対応する．

この個別証券会社の超過需要関数の計測上問題なのは $\bar{p}_{kt}$ を観測することができないことであった. 新井[2009a]では，ε_{kt} を t 期に発生した情報として $\bar{p}_{k,t+1} = \bar{p}_{kt} + \varepsilon_{kt}$ のように期待形成を想定した．この期待形成によって

$\beta_0 = \sum_{k=1}^{H} \alpha_k \frac{1}{H} \sum_{k=1}^{H} \bar{p}_{k0}$ ，　$\beta_1 = -\sum_{k=1}^{H} \alpha_k$ とおいた回帰式　$\sum_{k=1}^{H} X_{kt} = \beta_0 + \beta_1 p_t$

を導出することができる．すなわち今期の建玉水準を今期の価格水準で説明する回帰式である．このまま OLS で推定することもできるが，回帰式のパラメータの間に以下の制約が存在する．

$$\beta_0 = -\beta_1 \times \gamma\,,\quad \beta_1 = -\sum_{k=1}^{H} \alpha_k\,,\quad \gamma = \frac{1}{H}\sum_{k=1}^{H} \bar{p}_{k0}$$

そのため厳密に推定するのであれば，この場合には制約付最小 2 乗法により測定することになり，γの値は，その証券会社で取引する経済主体の期待値の平均値になっているため，制約付最小 2 乗法によれば平均的なものになるが，経済主体の期待値を推定することが可能である．

3. 個別証券会社の予想価格分布の分散について

個別証券会社の期待値は以上のように考えると推定することは可能であるが，予想価格の分散についてはどのように考えたらよいであろうか？岩田[1997]によれば，富 w に関する負の指数型効用関数の絶対的危険回避度 a は対数型効用関数における初期の富 w_0 の逆数 $1/w_0$ の近似値を与える．その理由は次のようである．

$$1 + e(e^{-w/w_0}) = 1 - e^{1-w/w_0} = 1 - e^{-(w-w_0)/w_0}$$

であるが， $y \equiv (w - w_0)/w_0$ と置くと，

$$1 + e^{-y} = 1 - (1 + (-y) + (-y)^2/2 + O(y^3)) = y - \frac{y^2}{2} + O(y^3)$$

$$= \ln(1 + y) + O(y^3) = \ln\left(\frac{w}{w_0}\right) + O(y^3)$$

となる．

従って $a = 1/w_0$ としたときの負の指数型効用関数 $u(w) = e^{-aW}$ の 1 次変換 $1 + eu(w)$ は $w = w_0$ の近傍で $\ln(w/w_0) = \ln w - \ln w_0$ を $O(((w - w_0)/w_0)^3)$ のオーダーで近似する．一方，対数型効用関数 $u(w) = \ln w$ の絶対的危険回避度は $w = w_0$ において $1/w_0$ である．効用関数を 1 次変換しても絶対的危険回避度は変わらない．それ故，負の指数型効用関数の絶対的危険回避度 a は $w = w_0$ における対数型効用関数の絶対的危険回避度 $1/w_0$ の近似値とみることができる．このことを利用して 4 節では筆者がこれまで推定を行ったうちの A 証券の 2008 年 6 月限の場合を例に挙げて，個別証券会社の予想価格分布の標準偏差の推定のやり方を述べる．

4. 個別証券会社の予想価格分布の標準偏差の計測

4.1 A 証券

A 証券の場合には日経平均先物の超過需要曲線が右上がりになる場合が多い．これまでの研

究によって理論と整合的に右下がりになっていることは 2008 年 6 月限と 2007 年 6 月限であることが明らかになっている．そこで比較的最近の結果として 2008 年 6 月限のパラメータの推定値を利用して計算を行ってみよう．なお 2008 年 6 月限の A 証券の予想価格分布の期待値は 11293.2 円と推定され，超過需要曲線の傾きを示すパラメータの値は 15.764 と推定されている．なおこの推定について詳しくは筆者の昨年度のレポートを参考にしていただきたい．

A 証券で取引する取引者の数を N で表すことにすると，$\sum_{k=1}^{N}\alpha_k = \sum_{k=1}^{N} 1/a_k\sigma_k^2$ であった．

$N=1$ であるならば，$\sum_{k=1}^{N}\alpha_k = 1/a_k\sigma_k^2$ ＝15.764 である．$1/a_k = 10$ 万円であれば，

10 万円×$1/\sigma_k^2$=15.764 という式が成り立つ．したがって $\sigma_k^2 = 10$ 万円/15.764=6343.568 となる．$\sigma =$79.6465167 となり，予想価格分布の標準偏差は約 80 円と計算できる．もしこれが真実であるならば，かなり正確な予想を行っていたことになる．

A 証券で取引者の数を 2 とした場合（N=2 の場合）を考えよう．N=2 であるならば，$\sum_{k=1}^{2}\alpha_k = \sum_{k=1}^{2} 1/(a_k\sigma_k^2) = 15.764$．$\sum_{k=1}^{2} 1/(a_k\sigma_k^2)$ であるが，$1/(a_1\sigma_1^2)+1/(a_2\sigma_2^2) =$ 15.764 となる．a_1 と a_2 が異なり，さらに σ_1^2 と σ_2^2 が異なると計算は可能であるが，複雑なものとなってしまう．そこで $a_1 = a_2 = a$ と仮定し，さらに分散についても $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ として，A 証券の予想価格分布の標準偏差を計算してみることにする．すると $\sum_{k=1}^{2}\alpha_k = \sum_{k=1}^{2} 1/(a_k\sigma_k^2) = 1/(a_1\sigma_1^2)+1/(a_2\sigma_2^2) = 2\times 1/(a\sigma^2) = 15.764$．ここで $1/a =$ 10 万円とするならば，$2\times 10\text{万円}\times 1/\sigma^2 = 15.764$．$\sigma^2 =$ 20 万円/15.764＝12687.13524．$\sigma =$ 112.6371841 と計算することが可能である．N=1 の場合と比較すると 112.6371841−79.6465167=32.99066741 円増加している．N=1 として，1/a=20 万円の場合の σ の値はこの場合と同じになる．

だいたいの傾向が分かってきたので A 証券で N=10 の場合を考えよう．同様の計算を行うと，$\sigma^2 =$ 63435.67622，$\sigma =$ 251.8644005 円である．N=5 の場合と比較を行うと，251.8644005−178.0950255=73.76937496 円の増加である．N=9 の場合と比較すると 251.8644005−238.9395501=12.92485037 となり，N=5 の場合と比較すると予想価格分布の標準偏差の増加額は 6 円減っている．これは N=1 で 1/a=100 万円の場合に相当する．

ここで A 証券を通じて取引をする取引者数をぐっと増やして計算を行ってみよう．A 証券で N=100 の場合を考えよう．これまでと同じ計算により標準偏差を求めてみると次のようになる．$\sigma^2 =$634356.7622，$\sigma =$796.465167 となる．標準偏差を N=99 の場合と比較すると，796.465167−792.4728353=3.992331742 円となり，4 円を切る差になってきている．このケースは N=50 で 1/a=20 万円，N=20 で 1/a=50 万円，N=10 で 1/a=100 万円の場合に相当する．

そこで取引者数 N をさらに大きくして，A 証券で N=1000 の場合を考えてみよう．1/a=10 万円である．予想価格分布の標準偏差を求めると，$\sigma^2 = 6343567.622$ であるから $\sigma = 2518.644$ 円となる．N=300 の場合と比較すると 2518.644005-1379.518136=1139.125869 円増加している．N=999 の場合と比較すると，2518.644005-2517.384368=1.25963699 円であり，予想価格分布の標準偏差の増加幅は 2 円を下回り 1 円に近くなっている．ここで計算した予想価格分布の標準偏差は N=100 で 1/a=100 万円,N=50 で 1/a=200 万円,N=20 で 1/a=500 万円，N=10 のときに 1/a=1000 万円の場合に相当する．

今度は N=2000 の場合を考えてみよう．1/a=10 万円である．予想価格分布の標準偏差を求めると，$\sigma^2 = 12687135.24$ であるから $\sigma = 3561.90051$ 円である．N=1999 の場合と予想価格分布の標準偏差の差を計算すると，3561.90051-3561.009924=0.890586465 円で，標準偏差の増加額は 1 円を下回るようになってきている．なおこのケースは N=200 で 1/a=100 万円，N=20 で 1/a=1000 万円，N=10 で 1/a=2000 万円に相当する．

1/a=10 万円のときに，N=3000 の場合を考えてみよう．$\sigma^2 = 19030702.87$ であるから，$\sigma = 4362.419382$ 円と計算される．そこで N=2999 の場合と比較をしてみると，4362.419382-4361.692252=0.727130496 円であり，1 円を下回るようになったがまだ約 0.7 円の増加しており，一定の値に収束したとは言えない．このケースは N=300 で 1/a=100 万円，N=30 で 1/a=1000 万円，N=15 で 1/a=2000 万円,N=10 で 1/a=3000 万円に相当する．

1/a=10 万円のときに，N=10,000 の場合を考えてみよう．予想価格分布の標準偏差を計算すると $\sigma^2 = 63442019.79$，$\sigma = 7965.049893$ 円である．N=9999 の場合と比較すると，7965.049893-7964.65167=0.398222628 円となる．このケースは N=1000 で 1/a=100 万円，N=100 で 1/a=1000 万円，N=50 で 1/a=2000 万円,N=10 で 1/a=10,000 万円に相当する．

このようにして 1/a=10 万円として N=10,000 にまで増加させてσの値が一定の値に収束したかどうかを計算してみたが、収束したとは言い難い．予想価格分布の標準偏差は $\sigma = 7965.049893$ 円にまで増加している．もし予想価格分布として正規分布が想定されるのであれば，平均値＝期待値として，平均値から $\pm 2\sigma$ まで考えると，マイナス方向は 0 以下の部分がかなり大きくなってしまい，$\sigma = 7965.049893$ 円という値自体を信頼することはできなくなっている．

そこで 1/a=10 万円のときに，N=5000 の場合を考えてみよう．$\sigma = 5631.859206$ 円であったから，平均値＝期待値として，平均値から $\pm 2\sigma$ まで考え，マイナス方向で平均から 2σ を考えると，この場合に平均マイナス 2σ が 0 になるので，1 つの候補であるとはいえる．

マイナス方向で平均から 3σ がちょうど 0 になるような場合を考えてみよう．N=2000 の場合，1/a=10 万円であるとすると，$\sigma = 3561.90051$ 円である．この予想価格の標準偏差の水準であるならばマイナス方向で平均から 3σ がちょうど 0 になる．N=1999 の場合と予想価格分布の標準偏差の差を計算すると，0.890586465 円で，標準偏差の増加額は 1 円を下回るようになってきている．この数値が 1 円を下回っているかどうかを収束したかどうかの 1 つの基準としてもよいであろう．

大阪証券取引所によれば証拠金は現在は日々の日経平均の変動率に応じて証拠金を預託する制度に変更されており，日経平均先物の場合，最低証拠金は現在 63 万円（毎週変更され数十万円程度）であるという．1/a は初期保有資産であったが，最低証拠金の金額からすると初期保有資産が 10 万円というのはあまりにも低すぎる．1/a は岩田[1997](p.79)のように損失許容額と考えた方がよいであろう．1/a=10 万円，N=2000 の場合は N=200 で 1/a=100 万円，N=20 で 1/a=1000 万円，N=10 で 1/a=2000 万円に相当する．100 万円程度が取引者の損失許容額であるとすると取引者数が 200 人となるので，推測ということになってしまうが，この程度が妥当ではないかと思われる．

５．まとめ

本稿においては日経平均先物の証券会社別の超過需要関数のパラメータを利用して個別証券会社の予想価格分布の標準偏差を求めることができた．ただ予想価格分布の標準偏差を計算するためには，現在のままでは複雑すぎるという欠点がある．より簡単に計算することができれば実務的にも非常に有用なものとなるであろう．

予想価格分布の標準偏差を複雑な形でしか求められない理由は，日経平均先物超過需要関数が本稿のように説明変数が 1 つの線型であると，2 つ以上のパラメータは求められないことである．本稿で計測を行った個別証券会社の日経平均先物超過需要曲線の傾きを示すパラメータは$1/(a\sigma^2)$であり，絶対的危険回避度 a と予想価格分布の分散σ^2を分離して計測することは不可能である．そこで富 w に関する負の指数型効用関数の絶対的危険回避度 a は対数型効用関数における初期の富w_0の逆数 $1/w_0$の近似値を与えることを利用した．

超過需要曲線の傾きのパラメータは推定可能であるため，$a=1/w_0$の値に様々な値を与えて，σ^2の値を計算して求めた．測定できるのは各証券会社の超過需要関数であって，各証券会社で取引する顧客の超過需要関数を測定することは不可能である．そのため各証券会社の顧客の予想価格分布のパラメータは同一であると仮定する必要がある．また各証券会社の予想価格分布の標準偏差を計算するには，その証券会社を通じて取引をする取引者の数を確定する必要がある．取引者の数を十分に大きくすることで，ある一定の値に収束するのかを試してみたが，A 証券の超過需要関数のパラメータを利用した場合には，何らかの値に収束することはなかった．収束するのであれば，収束することを選択基準として，その値を予想価格分布の標準偏差として採用するかどうかを決定することができた．

予想価格分布が正規分布であるとすると，絶対的危険回避度 a を与えて，取引者の数を大きくしていった場合に求められる予想価格分布の標準偏差の 3σを計算し，同じく超過需要関数のパラメータとして計算される予想価格分布の期待値からマイナス 3σの値を考えると，この値がマイナスになる場合がある．日経平均の値がマイナスになることは非現実的であるから，ある一定の値に取引者の数を制限して，予想価格分布の標準偏差を計算することとし，予想価格分布の期待値からマイナス 3σの値が 0 近辺になるような標準偏差の値を選択することにした．その結果，A 証券の予想価格分布の標準偏差は約 3561 円となっ

た.

６．参考文献

新井啓[2007]「個別会員の経済行動の計量分析（日経平均先物と商品先物との違い)」,『商品取引所論体系』第13巻，全国商品取引所連合会，pp.146-186.
新井啓[2009a]「手口表による日経平均先物需要曲線の測定」明海大学『経済学論集』,Vol.21,No.1，pp.1-13.
新井啓[2009b]「期待の異質性の計測」明海大学『経済学論集』,Vol.22,No.1，pp.1-13.
新井啓[2010a]「日経225先物市場における建玉の共変動の利用による個別証券会社超過需要関数の計測」立正大学『経済学季報』，59-3.
新井啓[2010b]「異質的期待仮説を前提とした個別取引主体の予想株価確率分布期待値の推定とその統計的特性」明海大学『経済学論集』,Vol.22,No.1，pp.1-13.
新井啓[2010c]「日経225先物2007年6月限の証券会社別超過需要関数の計測」立正大学『経済学季報』，59-4.
新井啓[2010d]「日経225オプション契約の超過需要関数の計測について」立正大学『経済学季報』，60-1.
岩田暁一編著[1997]『先物・オプションの計量分析』慶応大学出版会