

ボラティリティ指数を利用した確率ボラティリティ・モデルの推定

大阪大学金融・保険教育研究センター大阪証券取引所寄附研究部門 石田 功

1. はじめに

近年、金融市場がリーマン・ショック等の激震に見舞われるたびに注目を集めるのがボラティリティ指数である。例えば株価ボラティリティ指数は、一定期間の将来の株価変動性（ボラティリティ）の市場参加者の予想をオプション価格から抽出したものであり、米国 S&P500 指数ベースのシカゴ・オプション取引所(CBOE) VIX が最も有名である。欧州ソブリン問題に際しても危機の緊迫度の指標として CDS レートとともに VIX も金融ニュースによく登場する。日本株ボラティリティ指数としては、大阪大学金融・保険教育研究センターが日経平均ベースの指数を CBOE 方式及び独自方式で算出・公表する指数（VXJ 及び CSFI-VXJ）がある。株価ボラティリティ指数を対象とする先物やオプションの上場デリバティブとしては、CBOE の VIX 先物・オプションの他、VSTOXX（欧州株）、VDAX-NEW（ドイツ株）、RTSVX（ロシア株）を対象とする先物が取引所で取引されている。日本国内でも既に VIX 関連指数に連動するタイプの ETF、ETN が大証、東証に上場されているが、最近、大証が日本経済新聞社の日経ボラティリティ・インデックスを対象とする先物取引を今冬を目途に導入すると発表する等、キャッチアップの動きが急展開している。

資産価格の変動性がボラティリティであり投資リスクの主要な尺度であるが、ボラティリティ自体も変動する。ボラティリティ指数先物はこのボラティリティ変動という将来の投資環境の変動リスクを直接ヘッジする手段となる。市場全体レベルのボラティリティに連動する金融商品は、ボラティリティ上昇リスクをヘッジする手段となるので、投資家は期待リターンが負であっても保有したいと願うかもしれない。実際、多くの実証研究において、株式市場におけるボラティリティ・リスク・プレミアムが負であることが報告されている。ボラティリティ分析は、これまでもアセット・アロケーション、デリバティブ分析、リスク管理の重要な要素であったが、ボラティリティ連動型の金融インスツルメントの取引の広がりとともに、ボラティリティ・リスク・プレミアム計測の課題も含めてますます重要になっている。そこで、本稿では、株価指数ボラティリティ変動の時系列プロセスとボラティリティ・リスク・プレミアムを株価指数とそのボラティリティ指数の日次データから比較的簡単に推定する方法の一つである Duan and Yeh (2010)が提案した方法を、日経平均と大阪大学 VXJ の日次データに適用した結果を報告する。なお、ボラティリティ指数の意義については本シリーズの仁科(2011)も参照されたい。

2. ボラティリティ指数と連続時間確率ボラティリティ・モデルにおけるスポット分散

まず、時間 t における株価指数 S_t とその単位時間当たりのボラティリティ $\sqrt{V_t}$ （時々刻々と変化するので瞬間ボラティリティもしくはスポット・ボラティリティと呼ばれる）の時間変

動のモデルとして、CEV (=constant elasticity of variance) 確率ボラティリティ・モデルと呼ばれる次の 2 変量拡散過程を仮定する (慣例に従い、 $\sqrt{V_t}$ をボラティリティ、 V_t を分散と呼び分け、単位時間は 1 年とする) :

$$d \ln S_t = \left(r - q + \delta_S V_t - \frac{1}{2} V_t \right) dt + \sqrt{V_t} dW_t \quad (1)$$

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \alpha V_t^\gamma dB_t \quad (2)$$

ここで、 r は無リスク金利、 q は配当レート、 δ_S は単位分散あたりのリスク・プレミアム、定数 κ, θ, α はそれぞれ長期平均への回帰スピード、分散の長期平均、分散のボラティリティを決めるパラメータ、 W, B は株価、ボラティリティそれぞれを確率的に駆動するブラウン運動 ($dW_t dB_t = \rho dt$) である ($-\frac{1}{2}V_t$ は対数変換の際に生じる項)。 $\gamma = 1/2$ の場合はよく知られた Heston モデル、 $\gamma = 1$ の場合は GARCH 拡散過程モデル (離散時間ボラティリティ変動モデルである GARCH との関連からの名称。Hull-White モデルと呼ばれることもある) となる。株価変動とボラティリティ指数の変動には強い負の相関があることが知られているが、この「レバレッジ効果」は上記モデルの $\rho < 0$ によってうまく捉えることができる。 $\delta_S, \kappa, \theta, \alpha$ を株価指数時系列データから推定する場合、 V_t が直接観測できない潜在変数であることがネックになるが、これを克服するための様々な統計手法が開発されてきた (具体的には Aït-Sahalia and Kimmel (2007)及びその引用文献を参照されたい)。

株価指数のデータだけでなく、株価指数オプションのデータも同時に用いて確率ボラティリティ・モデルを推定するアプローチも多数発表されてきた (Aït-Sahalia and Kimmel (2007)は代表的な論文のひとつ)。各時点 t におけるオプション価格と上記タイプのモデルから V_t を逆算する (つまりモデルに依存するインプライド分散を計算する) ことも可能であるが、各時点でのオプション・データや比較的面倒な数値計算処理が必要である。一方、最近発展したモデルフリー・インプライド・ボラティリティの理論 (渡部(2007)、大屋(2009)、Duan and Yeh (2010) 及びそれらの引用文献参照) に基づき、広範囲な拡散過程モデルの仮定の下で、 τ 期間の累積分散のリスク中立確率の下での期待値 $E_t^Q \left[\int_t^{t+\tau} V_s ds \right]$ を、 t 時点の様々な行使価格の指数オプション価格のクロスセクションにより近似できる。VIX タイプのボラティリティ指数 (その 2 乗を v_t と表す) はこれを行ったものであり、

$$v_t = \tau^{-1} E_t^Q \left[\int_t^{t+\tau} V_s ds \right] \quad (3)$$

が近似的に成り立つ (VIX、VXJ の場合は $\tau = 30/365$ 。 τ^{-1} は年率表示にするためのもの)。さらに、上記の CEV モデルを含むドリフトがアファイン型の確率ボラティリティ・モデルにおいては、右辺を展開すれば、

$$v_t = a + bV_t \quad (4)$$

が成り立つ、つまり各時点 t におけるボラティリティ指数とスポット分散の値がリンクすることが容易に分かる (Ishida, McAleer, and Oya (2011)ではこの関係を利用してレバレッジ ρ を推定する手法を提案した)。この関係を用いれば、例えば、モデルを日次離散時間の2変量正規分布ベースのもので近似し、 $\{\ln S_t, v_t\}$ の日次時系列データによる最尤法により未知パラメータを簡単に推定することが可能であることが分かる。この際には a, b が未知パラメータとして追加される。Duan and Yeh (2010)は、さらに、リスク中立確率の下でも次のようなアフェイン・ドリフト項を持つCEV確率ボラティリティ拡散過程が成立しているという仮定を置き分析を進めた：

$$d \ln S_t = \left(r - q - \frac{1}{2}V_t \right) dt + \sqrt{V_t} dW_t^* \quad (5)$$

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt - \delta_V V_t dt + \alpha V_t^\gamma dB_t^* \quad (6)$$

ここで、 W^* 、 B^* はリスク中立確率の下でブラウン運動（相関 ρ はそのまま保たれるものと仮定）である。これらは、Hestonモデルの場合を含めCEV確率ボラティリティ・モデルを用いたオプション分析の分野ではよく置かれる仮定である。 $\ln S_t$ のドリフト項のうち実確率測度からリスク中立確率測度に移行した際に減る項が株価リターンリスク・プレミアムであったのと同様に、 δ_V は（単位分散当たりの）ボラティリティ・リスク・プレミアムと解釈される。このモデルの下では、 $\kappa^* \equiv \kappa + \delta_V$ と定義すれば、ボラティリティ・リスク・プレミアムは $\delta_V = \kappa^* - \kappa$ 、式(6)のドリフト項は $(\kappa\theta - \kappa^*V_t)dt$ 、さらに

$$a = \frac{\kappa\theta}{\kappa^*} \left(1 - \frac{1 - e^{-\kappa^*\tau}}{\kappa^*\tau} \right), \quad b = \frac{1 - e^{-\kappa^*\tau}}{\kappa^*\tau} \quad (7)$$

となり、追加的パラメータは a, b の2個ではなく、 κ^* の1個のみであることが容易に分かる。Duan and Yeh (2010)は、 r にリスクフリー・レートデータをあて、 q はモデルのパラメータとして推定しているが、本稿では $\mu \equiv r - q$ をひとつのパラメータとして推定した。なお、Duan and Yeh (2010)は、2変量拡散過程のモデルだけではなく、株価指数過程がジャンプを含むモデルによる分析も行っている。

本稿では潜在変数であるスポット分散の連続時間モデルのパラメータ推定に焦点を当てているが、ボラティリティ指数時系列のモデル化を直接のターゲットとする実証研究も多く発表されている。例えば、本シリーズにも、VXJの離散時間時系列モデルの枠組みで若干の実証分析を行っている石田(2010)がある。

3. モデル・パラメータとボラティリティ・リスク・プレミアムの推定

ここまで来れば、日次データ（株価とボラティリティ指数）と日次離散化モデルによりパラメータ $(q, \delta_S, \kappa, \theta, \alpha, \kappa^*, \gamma, \rho)$ 推定のための尤度関数が簡単に求まる：

$$LL = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^T \left[(2\gamma + 1) \ln V_{t_i-h} + \frac{(Z_{S,t_i}^2 + Z_{V,t_i}^2 - 2Z_{S,t_i}Z_{V,t_i})}{((1-\rho^2)h)} \right] - T \ln(2\pi\alpha h) - T \ln b - \frac{T}{2} \ln(1-\rho^2) \quad (8)$$

$$Z_{S,t_i} \equiv \left[\ln S_{t_i} - \ln S_{t_i-h} - \left(\mu + \left(\delta_S - \frac{1}{2} \right) V_{t_i-h} \right) h \right] / \sqrt{V_{t_i}} \quad (9)$$

$$Z_{V,t_i} \equiv [V_{t_i} - V_{t_i-h} - \kappa(\theta - V_{t_i-h})h] / (\alpha V_{t_i}^\gamma) \quad (10)$$

ここで、 b は(7)式の通り、 $h=t_i-t_{i-1}=1/246$ は年単位での1日の長さ、 T は日次標本のサイズである。

4. データとモデル推定結果

日経平均とそのボラティリティ指数である VXJ の日次終値データには、それぞれ Yahoo! Finance (US)、大阪大学金融・保険教育研究センター・ウェブ・ページからダウンロードした標本期間 1998年1月5日から 2011年9月30日までの 13年9か月のデータを用いた。下図は両系列の時系列プロットである。VXJ のプロットからは、ボラティリティのリーマン・ショックや東日本大震災後の急上昇、また、最近の欧州不安を反映した上昇が見てとれる。

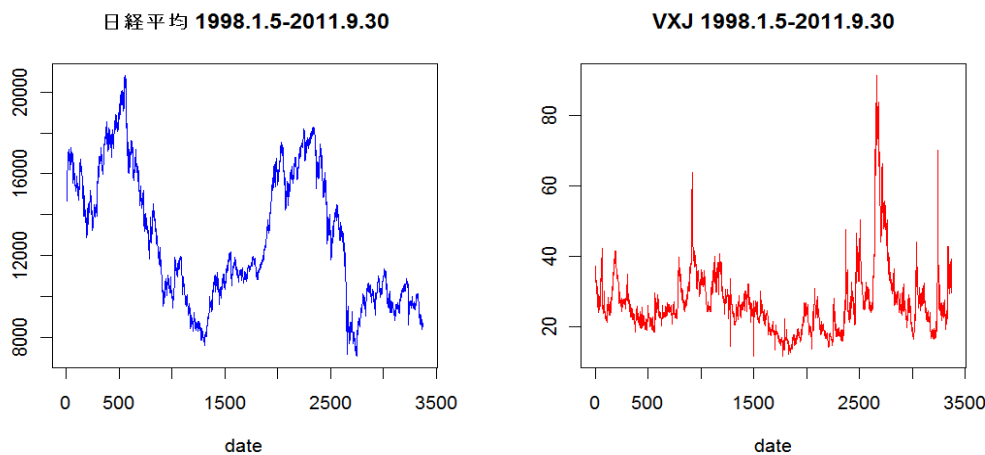


表 1 パネル 1 に全標本期間のデータを用いた推定結果を示した。モデル推定においてはパーセント表示の VXJ を 100 で除したものを用いている。1 段目は γ に制約を加えないモデル、2 段目は GARCH 拡散過程 ($\gamma = 1$)、3 段目は Heston モデル ($\gamma = 1/2$) の推定結果である。米国 S&P500 指数の場合は γ の推定値として 1 前後の値を得、Heston モデルを強く棄却する実証報告が多いが、日本株についてはこの期間は .576 となり、尤度比検定統

計量(LR)は GARCH 拡散過程モデル、Heston モデルの両者を棄却するものの、後者の場合の方が値はるかに小さかった。 κ は、ボラティリティの平均回帰を示す正の値に推定されており、 ρ は「ボラティリティと株価変動の逆相関」という stylized fact と整合的な負の値に推定されている。GARCH 拡散過程モデルの場合、長期平均スポット分散を示すパラメータ θ の推定値は非常に大きなもつともらしくない値(ボラティリティに換算すれば年率約150%)となったが、これは制約 $\gamma = 1$ という特定化の誤りの影響かもしれない(拡散関数の特定化が誤っておれば、ドリフト関数も正確に推定できない)。最も顕著なのは、 κ^* 及びボラティリティ・リスク・プレミアム δ_V の推定結果である。モデルの特定化が正しければ、負に大きな κ^* の値は、リスク中立確率の下でのスポット分散過程が平均回帰的ではなく発散的であることを含意する。負のボラティリティ・リスク・プレミアムは欧米市場データの分析でも報告されているし、本稿と同じモデル・アプローチの Duan and Yeh (2010)でも κ^* 推定値は、-10 前後と負に大きな値となっているものの、日経平均と VXJ データから得られた結果は極端である。

表1 モデル推定結果

全期間：1998年1月5日～2011年9月30日

| μ | κ | θ | α | ρ | γ | δ_S | κ^* | δ_V | LR |
|---------------------------|--------------------|--------------------|-------------------|-------------------|-------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|----------------------------------|
| -0.0172 (.0632) | 6.0502 (.9246) | .0533 (.0030) | .3268 (.0233) | -.5163 (.0127) | .5762 (.0240) | -.6089 (.5349) | -100.6318 (.3569) | -106.6820 (1.1895) | |
| -.5782 (.1348) | .0113 (.0069) | 2.1991 (0.3952) | 1.1048 (.0138) | -.4823 (.0132) | 1 | -11.4894 (2.3674) | -101.3330 (.3384) | -101.3443 (.1119) | 272.7369 (<i>pval</i> =.000) |
| .0458 (.0633) | 6.5919 (0.7614) | .05345 (0.0028) | .2633 (.0055) | -.5213 (.0013) | .5 | .5518 (.4983) | -100.5537 (.3525) | -107.1456 (.4659) | 10.2562 (<i>pval</i> =.001) |
| サブ期間：2005年1月5日～2011年9月30日 | | | | | | | | | |
| μ | κ | θ | α | ρ | γ | δ_S | κ^* | δ_V | LR |
| .0611 (.0873) | 5.9035 (0.8525) | .0511 (.0041) | 1.2933 (.1458) | -.6419 (.0015) | 1.0348 (.0385) | 1.2795 (.7222) | -100.6553 (.4940) | -106.5588 (.6700) | |
| .0873 (.0899) | 6.1347 (1.4651) | .0511 (.0046) | 1.1711 (.0254) | -.6447 (.0144) | 1 | 1.7879 (.9466) | -100.6223 (.5077) | -106.7571 (2.0643) | .7685 (<i>pval</i> =.3807) |
| .2742 (.3759) | 7.4362 (2.0016) | .0542 (.0045) | .2902 (.0104) | -.6419 (.0015) | .5 | 4.8228 (8.2609) | -100.3621 (.5524) | -108.0915 (3.8917) | 209.9991 (<i>pval</i> =.000) |

括弧内は標準誤差。 δ_V には $\kappa^* - \kappa$ を当てた(その標準誤差は通常の方法で求めた)。

パネル2により2005年1月以降のサブ期間のデータを用いてモデル推定した結果を示した。 δ_V は全期間の場合と変わりなかった(δ_V 推定値はどのようなサブ期間をとっても安定して負に極端に大きな値となった)。 γ は1に近い値に推定されており、このサブ期間においてはGARCH 拡散過程モデルがHestonモデルより当てはまりが良かった。CEVモデル

においては、例えば、 $\gamma = 1$ の場合の方が 0.5 の場合よりもボラティリティが急上昇しやすい等、 γ の値はボラティリティの時系列での挙動や周辺分布を決める重要なパラメータであり、オプションの理論価格にも影響する。 γ 推定値が期間によって大きく異なり安定していないということは、CEV モデルの特定化の誤りの可能性も含めてさらに深い分析が必要である。

5. まとめと今後の研究課題

本稿では、ボラティリティ指数データの応用例として、日経平均と大阪大学 VXJ の日次データからスポット分散過程の連続時間モデルとしては代表的なもののひとつである CEV モデルを推定するアプローチを紹介し、若干の実証結果を報告した。最も顕著な結果としては、負に極めて大きなボラティリティ・リスク・プレミアムの値が得られたが、長期オプション価格について知られている事実と整合的ではなく、モデルの特定化や推定手法をさらに詳細に検証する必要性を示すものである。実際、Duan and Yeh (2011) は、30 日間のボラティリティの指標である VIX により長期のボラティリティの指標を加えてモデル推定した場合は、リスク中立確率の下でもスポット分散プロセスが発散的ではなく平均回帰的な値にボラティリティ・リスク・プレミアムの値が推定されることを報告している。日本市場についても同様な分析を行うことをが、今後の課題としてあげられる。

参考文献

- 石田功 (2010). 「日本版ボラティリティ・インデックス VXJ の時系列特性」, 『先物オプションレポート』 (大阪証券取引所) 22 (6).
- 大屋幸輔 (2009). 「日本版モデルフリー・ボラティリティ・インデックス」, 『先物オプションレポート』 (大阪証券取引所) 21 (10).
- 仁科一彦 (2011). 「デリバティブ市場からのメッセージ」, 『先物オプションレポート』 (大阪証券取引所) 23 (5).
- 渡部敏明 (2007). 「モデル・フリー・インプライド・ボラティリティ」, 『先物オプションレポート』 (大阪証券取引所) 19 (12).
- Aït-Sahalia, Y., Kimmel, R. (2007), “Maximum Likelihood Estimation of Stochastic Volatility Models,” *Journal of Financial Economics* 83, 413-452.
- Duan, J.-C., Yeh, C.-Y. (2010). “Jumps and Volatility Risk Premiums Implied by VIX,” *Journal of Economic Dynamics & Control* 34, 2232-2244.
- Duan, J.-C., Yeh, C.-Y. (2011). “Price and Volatility Dynamics Implied by the VIX Term Structure,”
- Ishida, I., M. McAleer, K. Oya, 2011. Estimating the Leverage Parameter of Continuous-Time Stochastic Volatility Models Using High Frequency S&P 500 and VIX. *Managerial Finance* 37, 1048-1067.