# 日経平均株価のブル・ベア相場の分析
## —マルコフ・スイッチング EGARCH モデルの応用—*

東洋大学経営学部准教授　里吉清隆
日本大学経済学部准教授　三井秀俊

## 1. はじめに

株式市場において上昇・下降トレンドといった継続的な値動きの傾向が存在するかどうかは議論の分かれるところである．しかし，もしトレンドが存在するのであれば，統計的モデルによってこれらの上昇・下降トレンド，いわゆるブル・ベアを識別できる可能性があると考えられる．この問題についてはこれまで様々な方法が試されてきたが，マルコフ・スイッチング・モデル（Markov-Switching Model）をベースにした方法が，Maheu and McCurdy (2000) をはじめとして，多くの先行研究で用いられてきた．

本研究では日経平均株価のトレンドについて分析を行う．日経平均株価の変化率の平均は正の値と負の値の 2 つの状態をとり，正の値が続けば上昇トレンド（ブル相場），負の値が続けば下降トレンド（ベア相場）として，その 2 つの状態はマルコフ過程に従って推移するものと仮定する．ボラティリティの変動については，株価が上昇した翌日のボラティリティよりも下落した翌日のボラティリティの方が高くなるという，いわゆるボラティリティの非対称性が日経平均株価において以前から観察されていることから，広く一般に用いられている GARCH モデルではなく，exponential GARCH（EGARCH）モデルを用いることにする．また，ボラティリティには高い時期と低い時期があると考えられるため，ボラティリティの変動についてもスイッチングを起こすモデルとする．ただし，トレンドの転換（ブルからベア，もしくはベアからブル）とボラティリティのスイッチングが同時に起きているとは限らないことから，マルコフ過程に従う状態変数を 2 つにして，平均変化率とボラティリティのスイッチングが別々に起きるモデルにする．本研究ではこのモデルを，マルコフ・スイッチング EGARCH（MS-EGARCH）モデルと呼ぶことにする[1)]．ところで，マルコフ・スイッチング・モデルとボラティリティ変動モデルを単純に組み合わせると，状態変数の依存性からパラメータの推定が困難になることが知られている．それを回避するためにはモデルの定式化に何らかの工夫が必要になるのだが，本研究では Haas *et al.* (2004) の MS-GARCH モデルのアイデアを用いることにより，最尤法で推定可能なモデルとなっている[2)]．

里吉・三井 (2011) では, MS-EGARCH モデルで日経 225 オプション市場について分析を行ない，原資産である日経平均株価のブル・ベア相場の識別に MS-EGARCH モデルが有効であることを示している．そこで本研究では，MS-EGARCH モデルを拡張して，より詳細にブル・ベア相場について分析を行うことにする．まず，ボラティリティの非対称性がブル相場とベア相場で異なるかどうかを調べる．次に，ブル・ベア相場の推移確率が 1 期前の収益率の影響を受けているかどうか，つまり，ブル相場において価格の上昇はブル相場に留まる確率を高めるか，また，ベア相場においては価格の下落はベア相場に留まる確率を高めるか，状態変数の推移確率を可変推移確率（time-varying transition probability）として分析を行う．

---

*本研究は，三井・里吉 (2011) の研究成果の一部を纏めたものである．また，全国銀行学術研究振興財団（2010 年度）より助成を受けている研究の一環である．

1)Henry (2009) は，Gray (1996) の MS-GARCH モデルを拡張した MS-EGARCH モデルを提案し，英国の証券市場のデータについて分析を行なっている．ただし，状態変数は 1 つだけであり，平均とボラティリティは同時にスイッチングを起こすモデルとなっている．

2)大鋸・大屋 (2009) は，Haas *et al.* (2004) の MS-GARCH モデルをベイズ統計学に基づくマルコフ連鎖モンテカルロ法（MCMC 法）によって推定する手法を提案し，TOPIX の分析に有効であることを明らかにしている．

## 2. 分析モデル

### 2.1 MS-EGARCH モデル

資産価格の変化率を $R_t$ とすると，MS-EGARCH モデルは次のように表される．

$$R_t = \mu_a + \phi_a R_{t-1} + \sqrt{V_{ab,t}} z_t, \quad z_t \sim i.i.d., \ E[z_t] = 0, \ V[z_t] = 1, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \ln(V_{ab,t}) = \omega_b + \beta \ln(V_{ab,t-1}) + \theta \left[ \frac{R_{t-1} - \mu_a - \phi_a R_{t-2}}{\sqrt{V_{ab,t-1}}} \right] \\ + \gamma \left[ \left| \frac{R_{t-1} - \mu_a - \phi_a R_{t-2}}{\sqrt{V_{ab,t-1}}} \right| - E[|z_{t-1}|] \right], \end{aligned} \tag{2}$$

$$\mu_a = \mu_1 \Delta_{1t} + \mu_2 \Delta_{2t}, \quad \mu_1 < \mu_2, \tag{3}$$

$$\phi_a = \phi_1 \Delta_{1t} + \phi_2 \Delta_{2t}, \tag{4}$$

$$\omega_b = \omega_1 \Gamma_{1t} + \omega_2 \Gamma_{2t}, \quad \omega_1 < \omega_2, \tag{5}$$

$$p_{ij} = \Pr[\Delta_t = j | \Delta_{t-1} = i], \quad i, j = 1, 2, \tag{6}$$

$$q_{kl} = \Pr[\Gamma_t = l | \Gamma_{t-1} = k], \quad k, l = 1, 2. \tag{7}$$

トレンドを表すパラメータは $\mu_a$ であり，(3) 式のように $\mu_1 < \mu_2$ と制約を置く．資産価格によっては推定した結果 $\mu_1 < 0$，$\mu_2 > 0$ となるとは限らないが，$\mu_1$ をベア相場，$\mu_2$ をブル相場と呼ぶことにする．$V_{ab,t}$ はボラティリティであり，2 つの状態変数 $\Delta_t$，$\Gamma_t$ と，$t-1$ 時点までの情報集合 $I_{t-1} = \{R_{t-1}, R_{t-2}, \cdots\}$ を条件とした条件付き分散 $V_{ab,t} = V[R_t | \Delta_t = a, \Gamma_t = b, I_{t-1}]$ となっている．(3)，(4) 式の $(\Delta_{1t}, \Delta_{2t})$ は，$\Delta_t = 1$ のとき $(\Delta_{1t} = 1, \Delta_{2t} = 0)$，$\Delta_t = 2$ のとき $(\Delta_{1t} = 0, \Delta_{2t} = 1)$ となる変数である．同様に，(5) 式の $(\Gamma_{1t}, \Gamma_{2t})$ は，$\Gamma_t = 1$ のとき $(\Gamma_{1t} = 1, \Gamma_{2t} = 0)$，$\Gamma_t = 2$ のとき $(\Gamma_{1t} = 0, \Gamma_{2t} = 1)$ となる変数である．$\Delta_t$ と $\Gamma_t$ は互いに独立なマルコフ連鎖に従う状態変数であり，それぞれ 1，または 2 の値をとる．

株価収益率の分布は正規分布に比べると裾が厚い分布に従うことが知られている．そのため誤差項は，以下のような $t$ 分布に従うとする．

$$z_t \sim i.i.d.t(0, 1, \nu)$$

ここで，$\nu$ は自由度であり，$z_t$ は平均 0，分散 1 に基準化されている．モデルの推定は最尤法によって行う．詳細は里吉・三井 (2011) を参照のこと．

### 2.2 非対称性モデル

ボラティリティの非対称性（asymmetry）がブル相場とベア相場によって異なるモデルを考える．(2) 式の非対称性を捉えるパラメータ $\theta$ を $\theta_a$ として，以下のようにベア相場において $\theta_1$，ブル相場において $\theta_2$ となるモデルに拡張する．

$$\begin{aligned} \ln(V_{ab,t}) = \omega_b + \beta \ln(V_{ab,t-1}) + \theta_a \left[ \frac{R_{t-1} - \mu_a - \phi_a R_{t-2}}{\sqrt{V_{ab,t-1}}} \right] \\ + \gamma \left[ \left| \frac{R_{t-1} - \mu_a - \phi_a R_{t-2}}{\sqrt{V_{ab,t-1}}} \right| - E[|z_{t-1}|] \right], \end{aligned}$$

$$\theta_a = \theta_1 \Delta_{1t} + \theta_2 \Delta_{2t}.$$

このモデルを，MSEG-as モデルと呼ぶことにする．

### 2.3 可変推移確率モデル

ブル相場，ベア相場の推移確率が1期前の収益率の影響を受けるとき（可変推移確率，time-varying transition probability），推移確率は次のように定式化される．

$$p_{11,t} = \Pr\left[\Delta_t = 1 | \Delta_{t-1} = 1, R_{t-1}\right] = \frac{\exp(\lambda_0 + \lambda_1 R_{t-1})}{1 + \exp(\lambda_0 + \lambda_1 R_{t-1})},$$
$$p_{22,t} = \Pr\left[\Delta_t = 2 | \Delta_{t-1} = 2, R_{t-1}\right] = \frac{\exp(\xi_0 + \xi_1 R_{t-1})}{1 + \exp(\xi_0 + \xi_1 R_{t-1})}.$$

ここで，$\lambda_1 < 0$ ならば，$R_{t-1} < 0$ のとき $p_{11}$ は高くなる．つまり，価格の下落はベア相場に留まる確率を高める．$\xi_1 > 0$ ならば，$R_{t-1} > 0$ のとき $p_{22}$ は高くなり，価格の上昇はブル相場に留まる確率を高める．このモデルを，MSEG-tv モデルと呼ぶことにする．

## 3. 実証結果

### 3.1 データ

本研究では, 日経平均株価の日次データを用いて，MSEG-as，MSEG-tv モデルの推定を行った[3)]．標本期間は, 1990 年 1 月 4 日から 2011 年 2 月 28 日までである．収益率は日経平均株価終値の変化率（%）として計算した．標本サイズは 5205 である．

### 3.2 モデルの推定結果

表 1 には，MSEG-as モデルの推定結果を示した．平均 $\mu_1$，$\mu_2$ の推定値は $-0.069$，0.125 であり，マイナスとプラスの値に分かれた．このことから，状態変数 $\Delta_t$ が $\Delta_t = 1$ のとき日経平均株価はベア相場，$\Delta_t = 2$ のときはブル相場であるということになる．$\Delta_t$ の推移確率 $p_{11}$，$p_{22}$ の推定値はそれぞれ 0.997，0.991 であり，どちらも 1 に非常に近い．したがって，一度ブルまたはベアにスイッチングを起こすと，その状態が長く続くと考えられる．一方，2 つ目の状態変数 $\Gamma_t$ の推移確率 $q_{11}$，$q_{22}$ の推定値はそれぞれ 0.993，0.897 となっている．$q_{11} > q_{22}$ であることから，一度ロー・ボラティリティ（$\Gamma_t = 1$）にスイッチングするとその状態が長く続くが，ハイ・ボラティリティ（$\Gamma_t = 2$）の状態はあまり長く続かないことが分かる．$\theta_1$ は統計的に有意な負の値 $-0.130$ であり，$\theta_2$ は有意でない．このことから，日経平均株価にはボラティリティの非対称性が存在するといわれているが，実はブル相場には無く，ベア相場のみに存在するのではないかと考えられる．

表 2 には，MSEG-tv モデルの推定結果を示した．期待収益率 $\mu_1$，$\mu_2$ の推定値は $-0.066$，0.092 であり，MSEG-as モデルの結果と同様に，マイナスとプラスの値に分かれている．ベア相場の可変推移確率 $p_{11,t}$ の式のパラメータを見てみると，前日の収益率 $R_{t-1}$ の係数 $\lambda_1$ は $-1.077$ と負の値であり，5% 有意水準で有意となっている．このことから，前日の価格の下落は，ベア相場に留まる確率を高める傾向があると考えられる．一方，ブル相場の可変推移確率 $p_{22,t}$ のパラメータ $\xi_1$ は統計的に有意な正の値 1.454 であり，前日の価格の上昇がブル相場に留まる確率を高めていることが分かる．これらの結果から，日経平均株価のトレンド分析において，前日の価格変動がトレンドを決定する重要なファクターである可能性があると考えられる．

図 1，2 にはブル（$\Delta_t = 2$）になる確率を示した．この確率は全てのデータが与えられたもとで計算されている．どの期間をブルとするか，またはベアとするかは，そもそも定義が曖昧であり難しい問題ではあるが，グラフを見る限り，このモデルを使うと部分的にはブル・ベアを捉えることができているのではないかと考えられる．

---

[3)] 日経平均株価のデータは，日経 NEEDS-FinancialQUEST を利用した．また，パラメータの推定には，プログラミング言語である OxMetrics 5.00 (http://www.oxmetrics.net/) を利用した．

表 1: MSEG-as モデルの推定結果

| | $p_{11}$ | $p_{22}$ | $\mu_1$ | $\mu_2$ | $\phi_1$ | $\phi_2$ | $\theta_1$ | $\theta_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 推定値 | 0.997 | 0.991 | −0.069 | 0.125 | −0.028 | −0.012 | −0.130 | −0.027 |
| 標準誤差 | 0.002 | 0.004 | 0.016 | 0.045 | 0.013 | 0.033 | 0.013 | 0.021 |

| | $q_{11}$ | $q_{22}$ | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\beta$ | $\gamma$ | $\nu$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 推定値 | 0.993 | 0.897 | 0.007 | 0.054 | 0.982 | 0.077 | 18.971 |
| 標準誤差 | 0.003 | 0.042 | 0.003 | 0.010 | 0.003 | 0.013 | 6.558 |

表 2: MSEG-tv モデルの推定結果

| | $\lambda_0$ | $\lambda_1$ | $\xi_0$ | $\xi_1$ | $\mu_1$ | $\mu_2$ | $\phi_1$ | $\phi_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 推定値 | 6.120 | −1.077 | 5.733 | 1.454 | −0.066 | 0.092 | −0.033 | −0.006 |
| 標準誤差 | 1.239 | 0.577 | 1.051 | 0.532 | 0.022 | 0.038 | 0.019 | 0.030 |

| | $q_{11}$ | $q_{22}$ | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\beta$ | $\theta$ | $\gamma$ | $\nu$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 推定値 | 0.990 | 0.931 | 0.003 | 0.040 | 0.984 | −0.118 | 0.063 | 19.654 |
| 標準誤差 | 0.004 | 0.022 | 0.003 | 0.008 | 0.003 | 0.012 | 0.013 | 6.703 |

## 4. 結論と今後の課題

本研究では，日経平均株価のブル・ベア相場について，ボラティリティの非対称性と，前日の価格変化がトレンドに与える影響について分析を行った．1990 年以降のデータについて分析を行ったところ，価格が上昇した翌日のボラティリティよりも下落した翌日のボラティリティのほうが高くなるというボラティリティの非対称性は，ベア相場においては観察されたが，ブル相場では存在しないのではないかという結果を得た．また，前日の価格変化については，ベア相場では価格の下落はベアに留まる確率を高め，ブル相場では価格の上昇はブルに留まる確率を高めていることが明らかになった．

本文中でも述べたように，どの期間をブル相場またはベア相場とするかは難しい問題ではあるが，本研究のモデルよりもブル・ベア相場の識別に関して優れているモデルが存在する可能性は十分にある．トレンドの予測という観点も含めて，更なるモデリングの工夫，モデル比較などを今後の課題としたい．

## 参考文献


[1] 大鋸崇・大屋幸輔 (2009) 「株式市場におけるブル相場，ベア相場の日次データを用いた分析—ベイジアンアプローチ」『ジャフィー・ジャーナル（金融工学と市場計量分析）』, pp.112–150.

[2] 里吉清隆・三井秀俊 (2011) 「原資産価格のブル・ベアを考慮したオプション価格付けの実証研究」日本大学経済学部産業経営研究所『産業経営研究』，第 33 号, pp.63–87.

[3] 三井秀俊・里吉清隆 (2011) 「資産価格のブル・ベア分析—マルコフ・スイッチング・モデルの応用—」, 2011 年度統計関連学会連合大会（日本統計学会第 79 回大会）研究報告.

[4] Gray, S. F. (1996) “Modeling the Conditional Distribution of Interest Rates as a Regime-Switching Process,” *Journal of Financial Economics*, 42, pp.27–62.

[5] Haas, M., Mittnik, S. & Paolella, M. S. (2004) “A New Approach to Markov-Switching GARCH Models,” *Journal of Financial Econometrics*, 2, pp.493–530.

[6] Henry, O. T. (2009) “Regime Switching in the Relationship between Equity Returns and Short-Term Interest Rates in the UK,” *The Journal of Banking & Finance*, 33, pp.405–414.

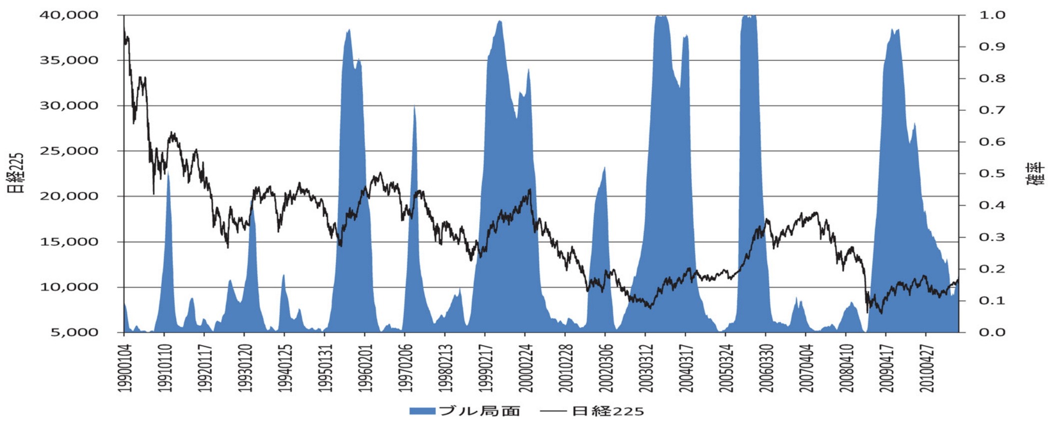


図 1: ブル相場になる確率（MSEG-as モデル）

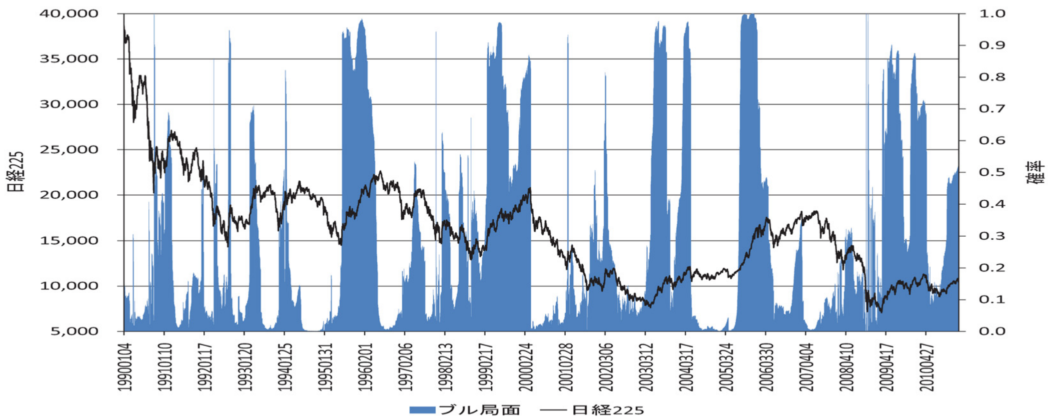


図 2: ブル相場になる確率（MSEG-tv モデル）

[7] Maheu, J. M. & McCurdy, T. H. (2000) “Identifying Bull and Bear Markets in Stock Returns,” *Journal of Business & Economic Statistics*, 18, pp.100–112.