日経 225 の Realized Volatility*
–マイクロストラクチャ・ノイズと夜間・昼休みの調整–

一橋大学経済研究所教授 渡部敏明

1. はじめに

近年、資産価格のボラティリティの推定量として Realized Volatility が注目を集めている。例えば、日次 Realized Volatiliy は日中リターンの 2 乗を 1 日分足し合わせたものである。渡部 (2007) は Realized Volatility が日経 225 の将来のボラティリティの予測に有用であることを示しており、Watanabe and Ubukata (2009) は日経 225 オプション価格の導出に有用であることを示している。

Realized Volatility を計算するには 2 つの問題点がある。一つは、マイクロストラクチャ・ノイズである。もし資産価格にノイズがなければ、計算に用いる日中リターンの時間間隔を 0 に近づけると、Realized Volatility は真のボラティリティに収束する。しかし、実際の資産価格はマイクロストラクチャ・ノイズを含むので、日中リターンの時間間隔を 0 に近づけると、Realized Volatility はマイクロストラクチャー・ノイズばかりを拾ってしまう。もう一つの問題は、取引のない時間帯のリターンの処理である。東京証券取引所の取引時間は、9:00–11:00（前場）と 12:30–15:00（後場）なので、前日の 15:00–9:00 (夜間) と 11:00–12:30 (昼休み) の間は 1 分毎の価格が得られない。夜間と昼休みは時間間隔が長いので、それらのリターンをそのまま 2 乗して加えると、時間の離散化による誤差が無視できなくなる可能性がある。

Watanabe and Ubukata (2009) では、こうしたマイクロストラクチャー・ノイズや夜間・昼休みの処理によって、日経 225 の Realized Volatility の値がどの程度異なるか、またオプション理論価格のパフォーマンスがどの程度異なるかについても分析を行っているので、本稿ではその一部を紹介する。

2. Realized Volatility

資産価格の対数値 $p(s)$ が拡散過程

$$dp(s) = \mu(s)ds + \sigma(s)dW(s) \tag{1}$$

に従っているとする。ここで、$W(s)$ は標準ブラウン運動であり、$\mu(s)$、$\sigma^2(s)$ はそれぞれ瞬時的なドリフト、ボラティリティと呼ばれる。ファイナンス理論では、$\sigma(s)$ をボラティリティと呼ぶことが多いが、本稿では $\sigma^2(s)$ をボラティリティと呼ぶ。

このとき、$t-1$ を第 $t-1$ 日の取引終了時点、t を第 t 日の取引終了時点とすると、その間、すなわち第 t 日の真のボラティリティは、

$$\sigma_t^2 = \int_{t-1}^{t} \sigma^2(s)ds \tag{2}$$

と定義され、これは瞬間的なボラティリティ$\sigma^2(s)$ を積分したものなので、Integrated Volatility とも呼ばれる。

いま、第 t 日の日中の n 個のリターン・データ $\left\{r_{t-1+1/n}, r_{t-1+2/n}, \ldots, r_t\right\}$ が与えられているとする。このとき、それらを 2 乗して足し合わせた

$$RV_t = \sum_{i=1}^{n} r_{t-1+i/n}^2 \tag{3}$$

*本研究は、文部科学省科学研究費補助金「高頻度データを用いた日本の証券市場の計量分析」と一橋大学グローバル COE プログラム「社会科学の高度統計・実証分析拠点構築」から助成を受けている。

を第 t 日の Realized Volatility と呼ぶ。資産価格にノイズがなければ、(3) 式で定義される RV_t は、$n \to \infty$ とすると、(2) 式で定義される真のボラティリティ σ_t^2 に確率収束するので、n が十分大きいなら、RV_t は σ_t^2 の精度の高い推定量となる。

しかし、実際の日中リターンを用いて Realized Volatility を計算する時には、2 つの問題が生じる。まず、資産価格はマイクロストラクチャー・ノイズを含むことである。マイクロストラクチャー・ノイズとは市場のミクロ構造に起因するノイズのことで、代表的なものに bid-ask bounce や非同期取引がある。日経 225 のような株価指数で重要なのは非同期取引で、これは、市場に情報が流れた場合、まず頻繁に取引が行われている株式の価格に反映し、遅れて取引が頻繁でない株式の価格に反映するので、それらを平均した株価指数にはノイズが生じ、株価変化率に自己相関が生じるというものである。(詳しくは、Campbell et al. 1997 を参照されたい。)

いま、観測される対数価格を $\tilde{p}(s)$、真の対数価格を $p(s)$、マイクロストラクチャー・ノイズを $\eta(s)$ とし、

$$\tilde{p}(s) = p(s) + \eta(s),\ \eta(s) \sim WN(0, \sigma_\eta^2) \tag{4}$$

であるとする。ここで、簡単化のため、$\eta(s)$ は平均 0、分散 σ_η^2 のホワイトノイズであり、真の対数価格 $p(s)$ と無相関であるとする。

このとき、(4) 式を $t-\Delta$ から t までのリターンに直し、分散を計算すると以下のように表せる。

$$Var\left(\tilde{p}(t) - \tilde{p}(t-\Delta)\right) = Var\left(p(t) - p(t-\Delta)\right) + Var\left(\eta(t) - \eta(t-\Delta)\right) \tag{5}$$

ここで、真の対数価格 $p(s)$ が (1) 式に従っているとすると、右辺の第 1 項は、

$$Var\left(p(t) - p(t-\Delta)\right) = \int_{t-\Delta}^{t} \sigma^2(s) ds \tag{6}$$

となり、これは、時間間隔 Δ を小さくすると、0 に近づいていく。それに対して、(5) 式の右辺第 2 項は、

$$Var\left(\eta(t) - \eta(t-\Delta)\right) = 2\sigma_\eta^2 \tag{7}$$

となり、Δ に依存せず、一定である。

したがって、Δ を小さくすると、真のリターンの分散に比べてマイクロストラクチャー・ノイズの分散が相対的に大きくなってしまう。

3. マイクロストラクチャ・ノイズと夜間・昼休みの調整

東京証券取引所の取引時間は、9:00–11:00（前場）と 12:30–15:00（後場）である。そこで、以下、前日の 15:00–9:00 (夜間) のリターン $r_{t-1+\Delta^{(n)}}$、$n^{(m)}$ 個の前場のリターン $(r_{t-1+\Delta^{(n)}+\Delta}, \cdots, r_{t-1+\Delta^{(n)}+n^{(m)}\Delta})$、11:00–12:30 (昼休み) のリターン $r_{t-1+\Delta^{(n)}+n^{(m)}\Delta+\Delta^{(l)}}$、$n^{(a)}$ 個の後場のリターン $(r_{t-1+\Delta^{(n)}+\Delta^{(l)}+(n^{(m)}+1)\Delta}, \cdots, r_{t-1+\Delta^{(n)}+\Delta^{(l)}+(n^{(m)}+n^{(a)})\Delta})$ が得られたものとして話を進める。ただし、$\Delta^{(n)}$、$\Delta^{(l)}$、Δ はそれぞれ、夜間、昼休み、市場が開いている時のリターンの時間間隔を表わす。したがって、$\Delta^{(n)} + \Delta^{(l)} + (n^{(m)} + n^{(a)})\Delta = 1$ (日) である。

まず、以下のように、これらすべてのリターンの 2 乗し足し合わせたものを RVN と呼ぶ。

$$\begin{aligned} RVN_t \quad = \quad & r_{t-1+\Delta^{(n)}}^2 + \sum_{i=1}^{n^{(m)}} r_{t-1+\Delta^{(n)}+i\Delta}^2 + r_{t-1+\Delta^{(n)}+n^{(m)}\Delta+\Delta^{(l)}}^2 \\ & + \sum_{j=1}^{n^{(a)}} r_{t-1+\Delta^{(n)}+\Delta^{(l)}+(n^{(m)}+j)\Delta}^2 \end{aligned} \tag{8}$$

夜間と昼休みのリターンは時間間隔が長いので、それらをそのまま 2 乗して加えた RVN は時間の離散化誤差が膨らむ可能性がある。そこで、Hansen and Lunde (2005a) は、以下のように最初に昼休みと夜間を除いて計算した $RV_t^{(o)}$ に日次リターンの標本分散と $RV_t^{(o)}$ の標本平均の比を掛けるという方法を提案している。

$$RVHL_t = cRV_t^{(o)}, \quad c = \frac{\sum_{t=1}^{T}(R_t - \overline{R})^2}{\sum_{t=1}^{T} RV_t^{(o)}} \tag{9}$$

ここで、$\overline{R}$ は日次リターンの標本平均を表す。この方法を用いると、RV の標本平均と日次リターンの標本分散が等しくなる。他に、RV_t を $RV_t^{(o)}$、夜間のリターンの 2 乗、昼休みのリターンの 2 乗の加重平均とし、最適なウエイトを求めるという方法も提案されている (Hansen and Lunde 2005b)。

Watanabe and Ubukata (2009) では、$RV_t^{(o)}$ を以下の 2 つの方法で計算している。まず、マイクロストラクチャ・ノイズを無視して、単純に前場と後場のリターンの 2 乗を足し合わせる。

$$RV_t^{(o)} = \sum_{i=1}^{n^{(m)}} r^2_{t-1+\Delta^{(n)}+i\Delta} + \sum_{j=1}^{n^{(a)}} r^2_{t-1+\Delta^{(n)}+\Delta^{(l)}+(n^{(m)}+j)\Delta} \tag{10}$$

これを (9) 式によって $RVHL_t$ に変換する。

マイクロ・ストラクチャ・ノイズが存在すると、日中リターンには自己相関が生じる。そこで、次に、この自己相関を考慮し、以下のようにバートレット・カーネルを用いて $RV_t^{(o)}$ を計算する。

$$\begin{aligned}
RV(q)_t^{(o)} & \\
= \ & \sum_{i=1}^{n^{(m)}} r^2_{t-1+\Delta^{(n)}+i\Delta} + 2\sum_{k=1}^{q}\omega_k \sum_{i=1}^{n^{(m)}-k} r_{t-1+\Delta^{(n)}+i\Delta} r_{t-1+\Delta^{(n)}+(i+k)\Delta} \\
& + \sum_{j=1}^{n^{(a)}} r^2_{t-1+\Delta^{(n)}+\Delta^{(l)}+(n^{(m)}+j)\Delta} \\
& + 2\sum_{l=1}^{q}\omega_l \sum_{j=1}^{n^{(a)}-l} r_{t-1+\Delta^{(n)}+\Delta^{(l)}+(n^{(m)}+j)\Delta} r_{t-1+\Delta^{(n)}+\Delta^{(l)}+(n^{(m)}+j+l)\Delta}
\end{aligned} \tag{11}$$

ここで、ω_j は以下のように定義される。

$$\omega_j = 1 - \frac{j}{q+1}, \quad j = 1, \ldots, q \tag{12}$$

この $RV_t(q)^{(o)}$ を (9) 式を用いて以下のように変換する。

$$RVHL(q)_t = cRV(q)_t^{(o)}, \quad c = \frac{\sum_{t=1}^{T}(R_t - \overline{R})^2}{\sum_{t=1}^{T} RV(q)_t^{(o)}}. \tag{13}$$

これは、Hansen and Lunde (2006) で用いられている方法である。以下の分析では、$q = 1, 2$ とし、RVN、$RVHL$、$RVHL(1)$、$RVHL(2)$ の 4 つの Realized Volatility を計算している。

4. 日経 225 の Realized Volatility

Watanabe and Ubukata (2009) では、1996 年 5 月 29 日から 2007 年 9 月 27 日までの日経 225 の 1 分毎のリターンを用いて、前節で説明した 4 つの Realized Volatility を計算している。各 Realized

Volatility の基本統計量を表 1 にまとめている。$RVHL$、$RVHL(1)$、$RVHL(2)$ は (9) 式あるいは (13) 式によって平均が日次リターンの標本分散に等しくなるように調整しているので、すべて平均が等しくなっている。RVN はそうした調整をしておらず、他の Realized Volatility と比べて平均が低くなっている。標準偏差は、$RVHL$、$RVHL(1)$、$RVHL(2)$ ではさほど変わらないが、RVN はかなり低くなっている。すなわち、バートレット・カーネルによるマイクロストラクチャ・ノイズの調整は Realized Volatility にそれほど大きな差をもたらさないが、Hansen and Lunde (2005a) による夜間・昼休みのリターンの調整を行うか否かは大きな差をもたらすことがわかる。Watanabe and Ubukata (2009) にはグラフも載せているので、参照されたい。

表 1

	$RVHL$	$RVHL(1)$	$RVHL(2)$	RVN
平均	2.0331	2.0331	2.0331	1.1366
標準偏差	1.6144	1.6602	1.7760	0.8611
最小値	0.1700	0.1389	0.0948	0.0774
最大値	26.2450	23.6369	21.8362	11.5341

5. オプション価格への応用

Ubukata and Watanabe (2009) では、各 Realized Volatility を用いて日経 225 プット・オプションの理論価格を計算し比較を行っているので、その結果の一部を紹介する。Realized Volatility には長期記憶性があるとの研究結果が数多く得られている。また、株式市場では、株価が上がった日の翌日よりも下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇する傾向があることが知られている。そこで、Ubukata and Watanabe (2009) では、長期記憶性とボラティリティ変動の非対称性を考慮して、Realized Volatility の自然対数値 $\log(RV_t)$ を次の ARFIMA$(0,d,1)$-X モデルで定式化している。

$$(1-L)^d(\log(RV_t)-\mu_0-\mu_1|R_{t-1}|-\mu_2 D_{t-1}^-|R_{t-1}|)=u_t+\theta u_{t-1},\quad u_t\sim NID(0,\sigma^2) \tag{14}$$

ここで、R_{t-1} は $t-1$ 日の日次リターン、D_{t-1}^- は R_{t-1} が負であれば 1、それ以外では 0 をとるダミー変数、$u_t \sim NID(0,\sigma^2)$ は誤差項 u_t が平均 0、分散 σ^2 の過去と独立な正規分布に従うことを表している。 μ_2 が正であれば、株式市場のボラティリティ変動の非対称性と整合的になる。L はラグオペレータを表す ($L^k X_t = X_{t-k}$)。このモデルは、$d=0$ であれば、定常な ARMA$(0,1)$-X モデルになり、$d=1$ であれば、非定常な ARIMA$(0,1,1)$-X モデルになる。ARFIMAX モデルでは、d の値として 0 から 1 までの実数値も許容する。(d は負の値も取りうるが、ここでは考えない。) $0<d<0.5$ であれば、$\log(RV_t)$ は定常な長期記憶過程に従い、$0.5\le d<1$ であれば、非定常な長期記憶仮定に従う。$(1-L)^d$ は、$L=0$ でテーラー展開すると、以下のように表せる。

$$(1-L)^d = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d(d-1)\cdots(d-k+1)}{k!}(-L)^k \tag{15}$$

長期記憶性や ARFIMA モデルについて詳しくは、Beran (1994)、田中 (2006)、松葉 (2007)、矢島 (2003) 等を参照されたい。また、パラメータの推定には Beran (1995) の近似最尤法を用いており、この推定法について詳しくは、渡部 (2007) を参照されたい。

東京証券取引所の株式の取引終了時刻が 15:00 であるのに対して、大阪証券取引所の日経 225 オプションの取引終了時刻は 15:10 である。そこで、日経 225 オプション価格は終値ではなく、15:00 の価格を用いるのが望ましい。しかし、15:00 に価格がついていないオプションがあるため、Ubukata and Watanabe (2009) では、14:00 から 15:00 までで買い気配値と売り気配値が両方ついていて最も 15:00 に近い時刻の買い気配値と売り気配値の平均値を市場価格として用いている。約定価格ではなく、買い気配値と売り気配値の平均値を用いているのは、約定価格は bid-ask bounce によるマイクロストラクチャノイズを含むからである (Campbell et al. (1997) Chapter 3)。安全資産の金利 r には CD レートを用い、配当率 d は Nishina and Nabil (1997) に従い 0.5% で固定している。

具体的には、最初に、残存期間 1 か月のオプションが取引されている 2001 年 4 月 11 日の日経 225 プット・オプションの理論価格を以下のように導出している。まず、前日の 2001 年 4 月 10 日までの 1200 日間の日経 225 株価指数の各 Realized Volatility を用いて ARFIMAX モデルのパラメータを推定する。ここで、(9) 式の調整係数 c も同じ 1200 日間の日経 225 株価指数の Realized Volatility と日次リターンを用いて計算している。次に、その推定値と 2001 年 4 月 11 日の 15:00 の日経 225 株価指数と CD レートを用いてその日の 15:00 における残存期間 1 か月の日経 225 プット・オプションの理論価格を取引されているすべての権利行使価格について導出する。導出方法については、Watanabe and Ubukata (2009) を参照されたい。その次に残存期間 1 か月のオプションが取引されている日は 2001 年 5 月 9 日なので、その日の 15:00 におけるる残存期間 1 か月の日経 225 プット・オプションの理論価格をすべての権利行使価格について同様に導出する。以上を 2007 年 9 月まで繰り返し、計 730 の日経 225 プット・オプションの理論価格を計算し、以下の 4 つの損失関数を用いて各モデルのパフォーマンスを比較している。

$$MAE = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|\tilde{P}_i - P_i\right|, \quad RMSE = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\tilde{P}_i - P_i\right)^2}$$

$$RMAPE = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\tilde{P}_i - P_i}{\tilde{P}_i}\right|, \quad RMSPE = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\tilde{P}_i - P_i}{\tilde{P}_i}\right)^2}$$

ここで、N は比較に用いたオプションの数で、具体的には $N = 730$ である。また、$\tilde{P}_i$ は各モデルから導出された i 番目のオプションの理論価格、P_i は市場価格である。

結果は表 2 の通りである。* は、各損失関数で最も値が小さいことを示している。MAPE 以外のすべての損失関数で $RVHL$ の値が最も小さくなっており、このことから以下のことがわかる。(1) マイクロストラクチャノイズを考慮し、Hansen and Lunde (2006) の提案している バートレット・カーネルを用いて Realized Volatility を計算してもパフォーマンスは改善しない。(2) Hansen and Lunde (2005) の方法ではなく、昼休みと夜間のリターンの 2 乗を加えて Realized Volatility を計算するとパフォーマンスが悪くなる。

表 2

	RMSE	MAE	RMSPE	MAPE
$RVHL$	47.820*	28.926*	0.418*	0.278
$RVHL(1)$	48.161	29.077	0.418	0.275*
$RVHL(2)$	49.622	29.817	0.437	0.283
RVN	56.787	33.706	0.562	0.406

マイクロストラクチャ・ノイズの除去の方法には、バートレット・カーネルを用いる方法以外にも、最適な時間間隔の選択方法 (Aït-Sahalia et al. 2005、Bandi and Russell 2006, 2008)、複数の時間間隔を用いて RV を計算し組み合わせる方法 (Zhang, Mykland and Aït-Sahalia 2005、Zhang 2006)、他のカーネル推定量 (Barndorff-Nielsen et al. 2008) などが提案されている。Bandi, Russell and Yang (2008) はさまざまなマイクロストラクチャー・ノイズ除去の方法を用いて Realized Volatility を計算し、オプション価格に応用して比較を行っている。Watanabe and Ubukata (2009) には掲載

していないが、Bandi et al. (2008) の用いているマイクロストラクチャー・ノイズ除去の方法も試してみたところ、やはりオプション価格のパフォーマンスは改善しなかった。

参考文献

田中勝人 (2006)『現代時系列分析』岩波書店.

松葉育雄 (2007)『長期記憶過程の統計–自己相似な時系列の理論と方法』共立出版.

矢島美寛 (2003)「長期記憶をもつ時系列モデル」刈屋武昭・矢島美寛・田中勝人・竹内啓著『経済時系列の統計 その数理的基礎』第 II 部, pp.103–202, 岩波書店.

渡部敏明 (2007)「Realized Volatility–サーベイと日本の株式市場への応用」『経済研究』Vol.58 No.4, 352–373.

Aït-Sahalia, Y., Mykland, P. A. and Zhang, L. (2005), "How often to sample a continuous-time process in the presence of market microstructure noise," *Review of Financial Studies*, **18**, 351–416.

Bandi, F. M. and Russell, J. R. (2006), "Separating microstructure noise from volatility," *Journal of Financial Economics*, **79**, 655–692.

Bandi, F. M. and Russell, J. R. (2008), "Microstructure noise, realized variance, and optimal sampling," *Review of Economic Studies*, **75**, 339–369.

Bandi, F. M., Russell, J. R. and Yang, C. (2008), "Realized volatility forecasting and option pricing," *Journal of Econometrics*, **147**, 34–46.

Barndorff-Nielsen, O. E., Hansen, P. R., Lunde, A. and Shephard, N. (2008), "Designing realized kernels to measure the ex post variation of equity prices in the presence of noise," *Econometrica*, **76**, 1481–1536.

Beran, J. (1994), *Statistics for Long-Memory Processes*, Chapman & Hall.

Beran, J. (1995), "Maximum likelihood estimation of the differencing parameter for invertible short and long memory autoregressive integrated moving average models," *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **57**, 659–672.

Campbell, J.Y., Lo, A.W. and MacKinlay, A.C. (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press. (祝迫得夫・大橋和彦・中村信弘・本田俊毅・和田賢治訳 (2003)『ファイナンスのための計量分析』共立出版.)

Hansen, P. R. and Lunde, A. (2005a), "A forecast comparison of volatility models: does anything beat a GARCH(1,1)?" *Journal of Applied Econometrics*, **20**, 873–889.

Hansen, P. R. and Lunde, A. (2005b), "A realized variance for the whole day based on intermittent high-frequency data," *Journal of Financial Econometrics*, **3**, 525–554.

Hansen, P. R. and Lunde, A. (2006), "Realized variance and market microstructure noise," *Journal of Business & Economic Statistics*, **24**, 127–161.

Nishina, K. and Nabil, M. N. (1997), "Return dynamics of Japanese stock index options," *Japanese Economic Review*, **48**, 43–64.

Watanabe, T. and Ubukata, M. (2009), "Option pricing using realized volatility and ARCH type models," Global COE Hi-Stat Discussion Paper Series 066, Hitotsubashi University.

Zhang, L. (2006), "Efficient estimation of stochastic volatility using noisy observations: a multi-scale approach," *Bernoulli*, **12**, 1019–1043.

Zhang, L., Mykland, P. A., Aït-Sahalia, Y. (2005), "A tale of two time scales: determining integrated volatility with noisy high-frequency data," *Journal of the American Statistical Association*, **100**, 1394–1411.