

日本版ボラティリティ・インデックス VXJ の時系列特性

大阪大学金融・保険教育研究センター 石田 功

1 ボラティリティ・インデックス

資産価格のボラティリティが、デリバティブの価格付けやヘッジ、アセット・アロケーション等、投資意思決定のあらゆる分野においてキーとなる重要な要素であることはいうまでもない。しかしながら、ボラティリティは直接観測できないため、資産価格の過去の時系列データから統計的に推定したものや、オプション価格から逆算したインプライド・ボラティリティが用いられてきた。最も広くも用いられているインプライド・ボラティリティはブラック・ショールズ(BS)式に基づくものであるが、BS式は原資産価格が従う確率過程の瞬間的ボラティリティ σ_t が時間的に不変である等、実証的事実からかなり乖離する前提条件から導かれたものである。そこで提案されたのが、「モデルフリー・インプライド・ボラティリティ」(MFIV)である(MFIVの理論及びオプション価格からの計算式については大屋(2009)及び、そこで参照されている論文で説明されている)。MFIVの t 時点での値 V_t は

$$V_t = E_t \left[\int_t^{t+T} \sigma_t^2 dt \right], \quad (1)$$

つまり、瞬間的分散を将来の T 期間累積したものの期待値に等しいことを示すことができる(正確には実際の確率のもとでの期待ではなく「リスク中立確率」と呼ばれる確率のもとでの期待値。また、原資産価格がジャンプを含む場合は(1)式に修正が必要)。(1)式の導出に、資産価格のボラティリティが確率的に時間変動するケースも含むより一般的な確率過程しか前提としないことが名前の由来である。また、CEV 確率ボラティリティと呼ばれる原資産価格過程のもとでは

$$V_t = a + b\sigma_t^2, \quad (2)$$

の線形関係も成り立ち、実質的に瞬間的ボラティリティの変動が観測可能になる(例えば、Duan & Yeh 2007 参照)。ただし、 V_t の厳密な計算にはオプション価格の連続的なクロスセクション(行使価格について)が必要であり不可能なので、実際には離散的クロスセクションで近似することになる。

「恐怖指数」としても知られ、金融危機以降、日本のメディアにも頻繁に登場するVIXは、シカゴ・オプション取引所(CBOE)が算出・公表するS&P500インデックス・オプション・ベースのMFIVであり、米国株式市場を代表するボラティリティ・インデックスである。VIXの成功を受けて、CBOEはVIX自体をアンダーラインとするボラティリティ・デリバティブ(VIX先物、VIXオプション)の取引を開始しており、また、株価ボラティリティにとどまらず金・原油価格や通貨のボラティリティ・インデックスも算出・公表している。また、ドイツ等、各国の取引所が自国市場の株価ボラティリティ・インデックスを算出・公表している。日本では、大阪大学金融保険教育研究センター(CSFI)が大阪証券取引所の協力のもとに、日経平均オプションから日経平均の

MFIV となる Volatility Index Japan (VXJ) を日次で算出、公表している。VIX 等と同様に T は約 1 ヶ月に設定、近似ターゲットは $\sqrt{V_t}$ である。現行バージョンの計算方法は CBOE 方式に準じているが、CSFI ではより高い精度で $\sqrt{V_t}$ を近似する方法を研究開発中である

以下、本稿では VXJ 日次時系列データの統計的性質、VXJ 予測を試みた若干の結果を報告する。

2 VXJ データの統計的性質

分析には大阪大学 CSFI が web 上で公開している日次 VXJ データ

<http://www-csfi.sigmath.es.osaka-u.ac.jp/structure/activity/vxj.php?>

を用いた (VXJ 計算の詳細についての説明書もこのページよりダウンロードできる)。標本期間は 1995 年 1 月～2010 年 3 月 31 日 (標本サイズ 3750)、生 (raw) VXJ 系列と対数変換した系列 ($\ln VXJ$) について調べた。

図 1 日次 VXJ 時系列プロット

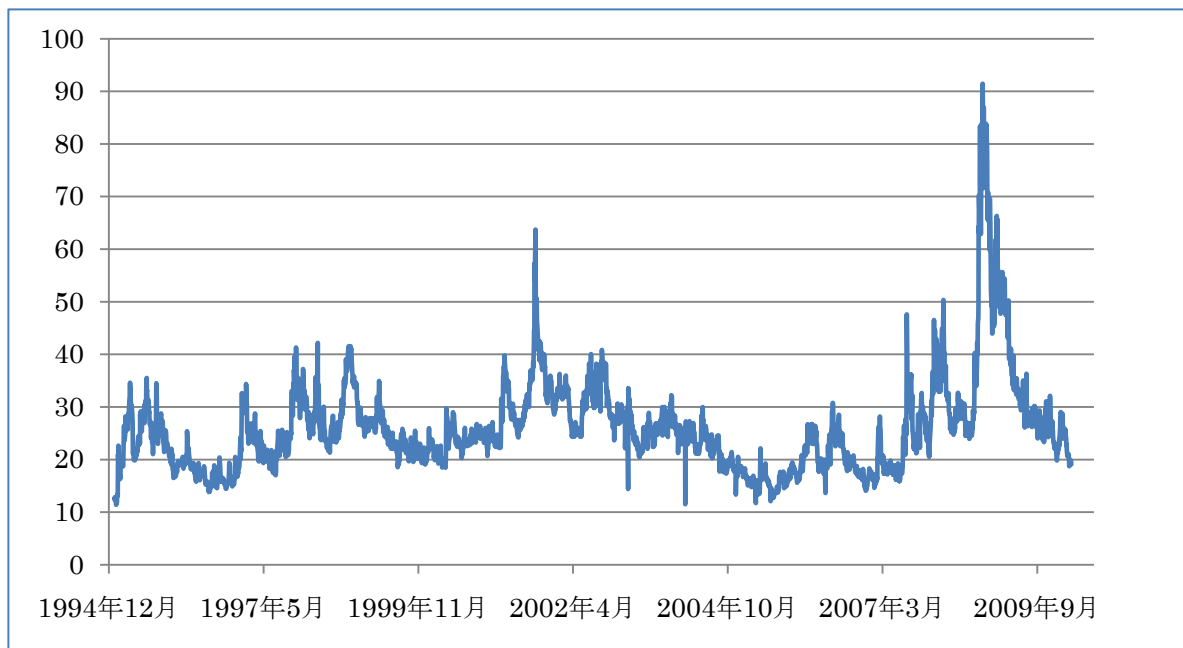


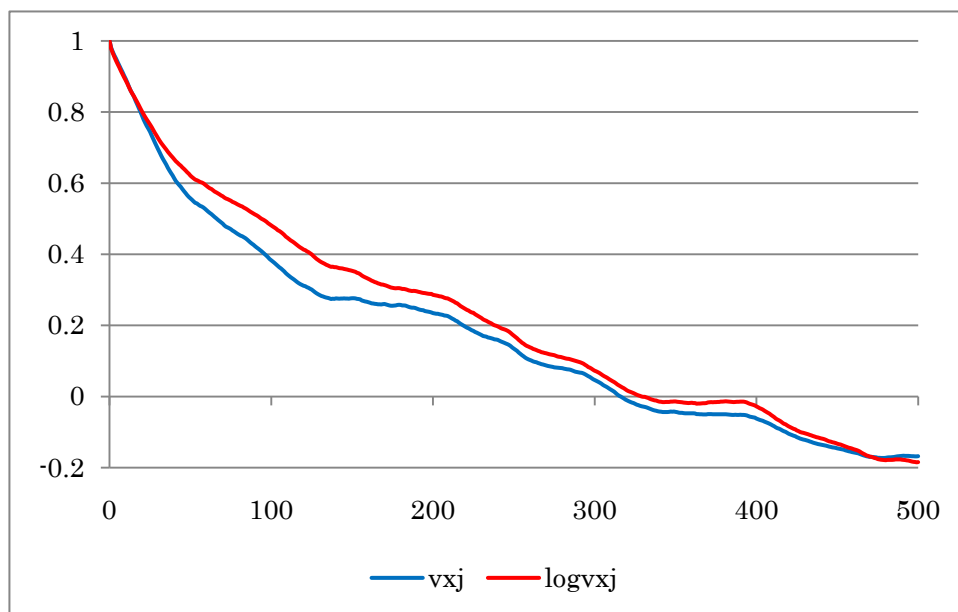
表 1 記述統計量

	VXJ	$\ln VXJ$
平均	25.945	6.416
標準偏差	9.082	0.596
最小値	11.400	4.867
最大値	91.450	9.032
歪度	2.446	0.688
尖度	13.094	4.509
Jarque-Bera	19660.351	649.469

VXJ の記述統計 (表 1) からまず、日経平均のボラティリティの変動は非常に激しいということが読み取れる。最小 11.4 から最大 90 のレンジで大きく変動しており、平均 25.9 に対して標準偏差 (つまり、ボラティリティのボラティリティ) が 9 を超えている。また、歪度、尖度、Jarque-Bera 統計量から VXJ の周辺分布の非正規性が伺える。対数変換によりかなり正規分布に近づくが、やはり非正規性は残る。

次に各系列の標本自己相関により時系列での依存性について調べた。株価インデックスの日次変化率の 2 乗や絶対値、GARCH 等の時系列モデルにより推定したボラティリティ、高頻度イントラデイ・データから計算した実現ボラティリティ (realized volatility) 等の他のボラティリティ指標について報告されている実証結果と同様、自己相関は非常に高く、それがラグ次数を上げてもゆっくりとしか減衰してない (図 2。ラグ次数 500 までプロットしていることに注意)。ボラティリティの長期記憶性を示唆する結果である。詳細については省略するが、いくつかの統計検定を行ったところ、結果は長期記憶性を支持するものであった。これまで報告されている VIX に関する実証結果と整合的である (例えば Fernandes et al. 2007)。ただし、一般に、短期記憶型の確率過程であっても、その構造が標本期間内に変化した場合、データからは見かけ上の長期記憶性が検出されやすいことに注意する必要がある。

図 2 コレログラム



3 時系列モデリングと予測

Bakshi et al. (2006)、Dotsis et al. (2007)、Duan and Yeh (2007)等、式(2)のような関係式をモチベーションとして、VIX が従う確率過程の連続時間モデルを VIX 時系列データから推定する研究も多いが、本稿では VXJ の時間変動のモデリング及び予測の予備的分析として日次の単純な離散時間モデルによる VXJ 予測を試みる。図 2 の標本自己相関関数のプロット (コレログラム) は ARMA

のような自己相関関数が指数関数的に減衰する短期記憶型のモデルよりも ARFIMA のような長期記憶型モデルの方が適していることを示唆するものである。本稿では、近年、ボラティリティ分析の定番的モデルとして多用されている次の HAR モデル (Corsi 2009) を用いた。

$$X_t = b_0 + b_d X_{d,t} + b_w X_{w,t} + b_{bw} X_{bw,t} + b_m X_{m,t} + \varepsilon_t \quad (3)$$

ここで、 X_t は VXJ もしくはその対数系列、 $X_{d,t}$ は X_t の 1 日前の値、 $X_{w,t}$ は過去 5 取引日 (約 1 週間) の平均、 $X_{bw,t}$ は過去 10 取引日 (約 2 週間) の平均、 $X_{m,t}$ は過去 22 取引日 (約 1 ヶ月) の平均である。ボラティリティには短期に平均回帰するコンポーネントとより長い期間かけてゆっくり平均回帰する持続的コンポーネントが含まれているという実証結果が報告されているが、HAR モデルはこのような異なるコンポーネントを捉えようとする非常にシンプルなモデルである。また、複数の短期記憶コンポーネントを混合したような確率過程は長期記憶的な振る舞いをすることも知られている。

全標本を用いたモデルの推定結果は表 2 の通り。対数系列を用いた場合の結果は省略した。 b_d 、 b_w の推定値は非常に有意に正であるが、 b_{bw} の推定値はゼロと異ならず、 b_m の推定値は通常の有意水準で有意に正ではあるもののマージナルであった (他のボラティリティ指標に HAR モデルを当てはめた既存研究と異なる点)。決定係数は 96.4% と非常に高く、ボラティリティの高い持続性により 1 日先の値が高い精度で予測できることがわかる。

表 2: HAR モデル推定結果

	係 数 推定値	標 準 誤 差
b_0	.4047	.0885
b_d	.7548	.0184
b_w	.2482	.0379
b_{bw}	.0207	.0397
b_m	-.0392	.0177

上記はインサンプル分析であったが、次に 1000 日間のローリング・ウィンドウによりモデルのパラメータを繰り返し推定し直し、ウィンドウの最終日の 1 日先、5 日先、10 日先、22 日先の予測を繰り返すアウト・オブ・サンプルでの予測を行った。モデルには $X_{bw,t}$ 、 $X_{m,t}$ も残した。実現値を予測値で回帰したときの決定係数は 1 日先予測 94.3%、5 日先予測 88.7%、10 日先予測 81.1%、22 日先予測 60.8% で、VXJ 系列はその持続性によりアウト・オブ・サンプルでも少なくとも 1 ヶ月程度先までは高い精度で予測できるという結果となった。

4 まとめ

本稿では大阪大学 CSFI が算出・公表している株式市場ボラティリティ・インデックスである VXJ の時系列データの統計的特性を調べ、単純な HAR モデルにより高い精度でボラティリティを予測できる可能性を示した。MFIV 以外のボラティリティ測度の分析においては、レバレッジ効果（株式インデックスの変化率がマイナスに大きい時の方がプラスに大きい時よりもボラティリティが上昇する）が知られており、原資産価格の変化率等の変数が VXJ の予測精度向上に役立つことも考えられる。その他、大屋（2009）の結果が示すように、米国株式市場ボラティリティ・インデックスである VIX も予測変数の候補である。

参考文献

- [1] Bakshi, G., N. Ju, and H. Yang (2006) “Estimation of Continuous-Time Models with an Application to Equity Volatility Dynamics,” *Journal of Financial Economics* 82, 227-249.
- [2] Corsi, F. (2009) “A Simple Approximate Long-Memory Model of Realized Volatility,” *Journal of Financial Econometrics* 7, 174-196.
- [3] Dotsis, G., D. Psychoyios, G. Skiadopoulos (2007) “An Empirical Comparison of Continuous-Time Models of Implied Volatility Indices,” *Journal of Banking and Finance* 31, 3584-3603.
- [4] Duan, J.-C., and C.-Y. Yeh (2007) “Jump and Volatility Risk Premiums Implied by VIX,” Working Paper, University of Toronto.
- [5] Fernandes, M., M.C. Medeiros, and M. Scharth (2007) “Modeling and Predicting the CBOE Market Volatility Index,” Working Paper, Queen Mary University of London.
- [6] 大屋幸輔 (2009) 「日本版モデルフリー・ボラティリティ・インデックス」, 『先物オプションレポート』, 大阪証券取引所, Vol.21, No.10.