Realized Volatility の変動のモデル化とオプション価格[*]

一橋大学経済研究所教授 渡部敏明

1. はじめに

資産価格のボラティリティは一度上昇（低下）するとしばらくボラティリティの高い（低い）期間が続くことが知られている。この現象は「ボラティリティ・クラスタリング」と呼ばれ、あらゆる資産価格で観測される。近年、資産価格の高頻度データを用いたボラティリティの推定量である Realized Volatility (RV) が注目を集めているが、RV は特にショックの持続性が高く、長期記憶過程に従うとの結果が多くの研究で示されている。そこで、RV の変動を定式化する場合、ARFIMA (autoregressive fractionally integrated moving average) モデルを用いることが多い。また、株式市場では価格が上がった日の翌日よりも下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇する傾向がある。こうしたボラティリティ変動の非対称性を考慮して ARFIMA モデルを拡張した ARFIMAX モデルもある。渡部 (2009) では、長期記憶性や ARFIMA(X) モデルについて解説し、ARFIMAX モデルを用いて日経 225 プット・オプションの理論価格を計算すると、市場価格の変動をうまく捉えられることを示した。

RV の変動を表すのによく使われるモデルにはもう一つ、Corsi (2009) によって提案された HAR (heterogeneou interval autoregressive) モデルがある。市場には異なる期間で投資を行っている投資家がいるので、このモデルでは、ボラティリティは過去の異なる期間のボラティリティに依存すると考える[1]。具体的には、Corsi (2009) は RV を前日、過去 1 週間、過去 1 か月の RV の関数として定式化している。このモデルは簡単でアドホックなモデルであるが、渡部 (2008) では、TOPIX のボラティリティの予測において、ARFIMA モデル同様、パフォーマンスが良いとの結果が得られている。

そこで、本稿では、HAR モデルおよびそれをボラティリティ変動の非対称性を考慮して拡張した HARX モデルについて解説し、それらを用いて日経 225 プット・オプションの理論価格を導出し、パフォーマンスを評価する。

2. HAR(X) モデル

Corsi (2009) は以下のようなモデルを提案している。

$$RV_t = \beta_0 + \beta_1 RV_{t-1} + \beta_2 RV_{t-1}^{(w)} + \beta_3 RV_{t-1}^{(m)} + u_t, \quad u_t \sim \mathrm{NID}(0, \sigma^2). \tag{1}$$

ここで、RV_t、RV_{t-1} は、第 t 日、第 $t-1$ の日次 RV を表す。また、$RV_{t-1}^{(w)}$、$RV_{t-1}^{(m)}$ はそれぞれ過去 1 週間と過去 1 か月の日次 RV の平均値を表し、以下のように定義する。

$$RV_{t-1}^{(w)} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} RV_{t-i}, \quad RV_{t-1}^{(m)} = \frac{1}{22}\sum_{i=1}^{22} RV_{t-i}.$$

u_t は誤差項で、平均 0、分散 σ^2 の独立な正規分布に従うと仮定する。このモデルは長期記憶モデルではないが、次数 22 と長い次数の AR モデルになっている。パラメータ $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ は最小 2 乗法で、σ^2 は残差分散として簡単に推定できる。

[*]本研究は、文部科学省科学研究費補助金「高頻度データを用いた日本の証券市場の計量分析」、「金融リスクと経済行動のベイズ計量経済分析」、「金融リスクの計量化と統計的推測に関わる諸問題の解明」と一橋大学グローバル COE プログラム「社会科学の高度統計・実証分析拠点構築」から助成を受けている。

[1]GARCH 型モデルで同様の定式化をしているものに、HGARCH (heterogeneous interval GARCH) モデルがある。このモデルについては、Müller et al. (1997), 大塚 (2008) を参照されたい。

しかし、オプションの理論価格を求めるために、(1) 式を用いて将来のボラティリティのシミュレーションを行うと、ボラティリティが負になってしまうことがある。そこで、本稿では、RV そのものではなく、RV の対数値を以下のように定式化する。

$$\ln(RV_t) = \beta_0 + \beta_1 \ln(RV_{t-1}) + \beta_2 \ln(RV_{t-1}^{(w)}) + \beta_3 \ln(RV_{t-1}^{(m)}) + u_t, \quad u_t \sim N(0, \sigma^2). \tag{2}$$

本稿では、このモデルを HAR モデルと呼ぶ。

株式市場では、株価が上がった日の翌日よりも下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇する傾向があることが知られているが、HAR モデルではこうしたボラティリティ変動の非対称性を捉えることができない。HAR モデルをこうしたボラティリティ変動の非対称性を考慮して拡張している文献はあまりないが、ここでは、以下のように拡張する。

$$\ln(RV_t) = \beta_0 + \beta_1 \ln(RV_{t-1}) + \beta_2 \ln(RV_{t-1}^{w}) + \beta_3 \ln(RV_{t-1}^{m}) + \beta_4 |R_{t-1}| + \beta_5 D_{t-1}^{-} |R_{t-1}| + u_t, \quad u_t \sim \mathrm{NID}(0, \sigma^2). \tag{3}$$

ここで、R_{t-1} は $t-1$ 日の日次リターン、D_{t-1}^{-} は R_{t-1} が負であれば 1、それ以外では 0 をとるダミー変数である。β_5 が正であれば、株式市場のボラティリティ変動の非対称性と整合的になる。このモデルを、以下、HARX モデルと呼ぶ。

3. オプション価格の導出

オプションの理論価格の導出は渡部 (2009, 2010) と同じ方法で行う。まず、$t-1$ 日と t 日の原資産価格の終値を S_{t-1}、S_t とし、t 日の日次リターンを以下のように定義する。

$$R_t = \log(S_t) - \log(S_{t-1}). \tag{4}$$

投資家の危険中立性と日次リターンの誤差項の正規性を仮定すると、日次リターンは以下のように定式化される。

$$R_t = r - d - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \epsilon_t, \quad \epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim \mathrm{NID}(0, 1). \tag{5}$$

ここで、r と d はそれぞれ連続複利計算した安全資産の金利と配当率を表す。

投資家の危険中立性を仮定すると、オプション価格は、満期におけるオプションの価値の期待値の割引現在価値となる。例えば、権利行使価格 K、残存期間 τ のプットオ・プションの T 日における理論価格は以下のようになる。

$$P_T = \exp(-r\tau) E\left[\mathrm{Max}(K - \tilde{S}_T, 0) | \boldsymbol{I}_T\right]. \tag{6}$$

ここで、$\tilde{S}_{T+\tau}$ はオプションの満期 $T+\tau$ 日における原資産価格、$\boldsymbol{I}_T$ は T 日における情報集合を表す。

(6) 式の期待値をシミュレーションによって数値的に計算することにより、理論価格を導出した。詳しくは、渡部 (2009) を参照されたい。

4. データ

日経 225 株価指数の RV と日次リターンを用いて HAR(X) モデルを推定し、それを用いて残存期間 1 か月の日経 225 プット・オプションの理論価格を導出し、市場価格と比較した。日経 225 株価指数の RV は、1 分毎の日経 225 株価指数データを用いて計算している。ただし、東京証券取引所の取引時間は、9:00–11:00（前場）と 12:30–15:00（後場）なので、前日の 15:00–9:00 (夜間) と 11:00–12:30

(昼休み) の間は 1 分毎の価格が得られない。夜間と昼休みのリターンは時間間隔が長いので、そのまま 2 乗して加えると、時間の離散化による誤差が膨らむ可能性があるので、それらは加えず、Hansen and Lunde (2005) の方法を用いている。この方法について詳しくは、渡部 (2010) を参照されたい。

東京証券取引所の株式の取引終了時刻が 15:00 であるのに対して、大阪証券取引所の日経 225 オプションの取引終了時刻は 15:10 である。そこで、日経 225 オプション価格は終値ではなく、15:00 の価格を用いるのが望ましい。しかし、15:00 に価格がついていないオプションがあるため、14:00 から 15:00 までで買い気配値と売り気配値が両方ついていて最も 15:00 に近い時刻の買い気配値と売り気配値の平均値を市場価格として用いている。ただし、下記の範囲に入っていない場合には削除した。

$$\mathrm{Max}(0, K\exp(-r\tau) - S_T\exp(-d\tau)) \leq P_T \leq K\exp(-r\tau). \tag{7}$$

約定価格ではなく、買い気配値と売り気配値の平均値を用いているのは、約定価格は bid-ask bounce によるマイクロストラクチャノイズを含むからである[2]。また、買い気配値と売り気配値の平均値は 1.5 円を下回ることはないので、計算された理論価格が 1.5 円を下回った場合は、理論価格を 1.5 円とした。安全資産の金利 r には CD レートを用い、配当率 d は Nishina and Nabil (1997) に従い 0.5% で固定している。

具体的には、最初に、残存期間 1 か月のオプションが取引されている 2001 年 4 月 11 日の日経 225 プット・オプションの理論価格を以下のように導出している。まず、前日の 2001 年 4 月 10 日までの 1200 日間の日経 225 株価指数の RV と日次リターンを用いて HAR(X) モデルのパラメータと誤差項の分散を推定する。次に、その推定値と 2001 年 4 月 11 日の 15:00 の日経 225 株価指数と CD レートを用いてその日の 15:00 における残存期間 1 か月の日経 225 プット・オプションの理論価格を取引されているすべての権利行使価格について導出する。その次に残存期間 1 か月のオプションが取引されている日は 2001 年 5 月 9 日なので、その日の 15:00 におけるる残存期間 1 か月の日経 225 プット・オプションの理論価格をすべての権利行使価格について同様に導出する。以上を 2007 年 9 月まで繰り返し、計 646 の日経 225 プット・オプションの理論価格を計算している[3]。

5. 結果

渡部 (2009, 2010) 同様、以下の 4 つの損失関数を用いて各モデルのパフォーマンスを比較する。

$$\mathrm{MAE} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|\tilde{P}_i - P_i\right|, \quad \mathrm{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\tilde{P}_i - P_i\right)^2}$$

$$\mathrm{RMAPE} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\tilde{P}_i - P_i}{\tilde{P}_i}\right|, \quad \mathrm{RMSPE} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\tilde{P}_i - P_i}{\tilde{P}_i}\right)^2}.$$

ここで、N は比較に用いたオプションの数で、具体的には $N = 646$ である。また、$\tilde{P}_i$ は各モデルから導出された i 番目のオプションの理論価格、P_i は市場価格である。

結果は表 1 の通りである。比較のため, ARFIMA(X) モデルとブラック・ショールズ (BS) モデルを用いた場合についても計算している。ARFIMA(X) モデルについては、渡部 (2009) を参照されたい。BS モデルでは、ボラティリティを過去 20 日間の日次リターンの標本標準偏差としている。また、* は、各損失関数で最も値が小さいことを示している。RMSPE と MAPE は ARFIMAX モデルで最小になっているが、RMSE と MAE は HARX モデルで最小になっている。

[2] bid-ask bounce については、Campbell et al. (1997) の Chapter 3 を参照されたい。

[3] 渡部 (2009, 2010) では (7) 式を満たさない価格も用いているので、今回はサンプル数が 730 から 646 に減っている。

表 1

	RMSE	MAE	RMSPE	MAPE
ARFIMA	47.7031	27.4354	0.3630	0.2474
ARFIMAX	46.9838	27.2558	0.3600*	0.2460*
HAR	47.9363	27.7089	0.4009	0.2705
HARX	46.5498*	27.1945*	0.4020	0.2678
BS	63.4549	36.5451	0.5721	0.4213

渡部 (2008) では、TOPIX のボラティリティの予測で同様の結果が得られている。ただし、そこでは HARX モデルは用いていないので、正確に言うと、RMSPE と MAPE では ARFIMAX モデルのパフォーマンスが高く、RMSE と MAE では HAR モデルのパフォーマンスが高くなっている。損出関数によってなぜこのような違いが生じるかは今後検討したい。

6. HAR モデルの拡張とその他のモデル

HAR モデルは簡単なので、その後、いくつか拡張が行われている。まず、Andersen et al. (2007) は、RV から統計的に有意なジャンプを除去し、さらに統計的に有意なジャンプを HAR モデルの説明変数に加えることにより、ボラティリティの予測パフォーマンスが改善することを示している。また、Corsi et al. (2008) は HAR モデルの誤差項の分散を GARCH モデルのよって定式化した HAR-GARCH モデルを提案している[4]。さらに、Liu and Maheu (2008) は構造変化を考慮して HAR モデルを推定している。

RV の変動を表すモデルには他にも Barndorff-Nielsen and Shephard (2001, 2002) らが提案した UC (Unobserved Components) モデルがある。このモデルは、資産価格の連続時間モデルからスタートし、そこから離散時間でサンプリングされた価格を用いて計算される RV が ARMA(1,1) モデルに従うことを示し、誤差項の分散を理論的に導出している。Nagakura and Watanabe (2010) は、マイクロストラクチャ・ノイズを考慮してこのモデルを拡張している。さらに、 Hansen et al. (2010) は GARCH モデルに RV の変動を表す式を加えたモデル、Takahashi et al. (2009) は stochastic volatility モデルに RV の変動を表す式を加えたモデルを提案している。

今後は、こうした新たなモデルも用いてオプション価格を導出し、パフォーマンスを比較したい。

参考文献

Andersen, T. G., Bollerslev, T. and Diebold, F. X. (2007), "Roughing it up: Including jump components in the measurement, modeling, and forecasting of return volatility," *Review of Economics and Statistics*, **89**, 701–720.

Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2001), "Non-Gaussian OU based models and some of their uses in financial economics (with Discussions)," *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **63**, 167–241.

Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2002), "Econometric analysis of realized volatility and its use in estimating stochastic volatility models," *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **64**, 253–280.

[4]Ishida and Watanabe (2009) は ARFIMA モデルの誤差項の分散を GARCH モデルによって定式化した ARFIMA-GARCH モデルを提案している。

Campbell, J. Y., Lo, A. W. and MacKinlay, A. C. (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press. (祝迫得夫・大橋和彦・中村信弘・本田俊毅・和田賢治訳 (2003)『ファイナンスのための計量分析』共立出版.)

Corsi, F. (2009), "A simple approximate long-memory model of realized volatility," *Journal of Financial Econometrics*, **7**, 174–196.

Corsi, F., Mittnik, S., Pigorsch, C. and Pigorsch, U. (2008), "The volatility of realized volatility," *Econometric Reviews*, **27**, 46–78.

Hansen, P. R., Huang, Z. and Shek, H. (2010), "Realized GARCH: A joint model of returns and realized measures of volatility," *Journal of Applied Econometrics*, forthcoming.

Hansen, P. R. and Lunde, A. (2005), "A forecast comparison of volatility models: does anything beat a GARCH(1,1)?" *Journal of Applied Econometrics*, **20**, 873–889.

Ishida, I. and Watanabe, T. (2009), "Modelimg and forecasting the volatility of the Nikkei 225 realized volatility using the ARFIMA-GARCH Model," CARF Working Paper, CARF-F-145, Center for Advanced Research in Finance, University of Tokyo.

Liu, C. and Maheu, J. M. (2008), "Are there structural breaks in realized volatility?" *Journal of Financial Econometrics*, **6**, 326–360.

Müller, U. A., Dacorognaa, M. M., Davé, R. D., Olsen, R. B., Pictet, O. V. and von Weizsäcker, J. E. (1997), "Volatilities of different time resolutions–Analyzing the dynamics of market components," *Journal of Empirical Finance*, **4**, 213–239

Nagakura, D. and Watanabe, T. (2010), "A state space approach to estimating integrated variance under the existence of microstructure noise," Global COE Hi-Stat Discussion Paper Series 115, Hitotsubashi University.

Nishina, K. and Nabil, M. N. (1997), "Return dynamics of Japanese stock index options," *Japanese Economic Review*, **48**, 43–64.

Takahashi, M., Omori, Y. and Watanabe, T. (2009), "Estimating stochastic volatility models using daily returns and realized volatility simultaneously," *Computational Statistics & Data Analysis*, **53**, 2404–2426.

大塚芳宏 (2008)「異質的市場仮説によるボラティリティ変動モデルの拡張と予測精度の検証」『現代ファイナンス』No.23, 91–107.

渡部敏明 (2007)「Realized Volatility–サーベイと日本の株式市場への応用」『経済研究』Vol.58, No.4, 352–373.

渡部敏明 (2009)「Realized Volatility を用いた日経 225 オプション価格の導出」『先物・オプションレポート』Vol.21, No.3.

渡部敏明 (2010)「日経 225 の Realized Volatility – マイクロストラクチャ・ノイズと夜間・昼休みの調整 –」『先物・オプションレポート』Vol.22, No.2.