SkewnessとKurtosisの観測と意義

SHERP Alternative Advisors

Executive Director

堀内　剛

1. はじめに

最近、ニュースの見出しなどにおいて、ボラティリティという言葉が散見されるようになり、デリバティブやオプションが一般の人たちの目に触れる機会が増えてきている。しかし、報道をよく読むと、用語や意味の誤用が目立ち、誤解を招きかねない記事が多いのも残念ながら事実である。ここでは、おなじみの前日比(Daily Return)から始めて、ボラティリティ(Volatility)そしてスキューネス(Skewness)とカルトシス（Kurtosis）へと展開していく。Skewnessは分布の非対称性、Kurtosisは分布のFat Tail性、数学的には各々3次と4次のモーメントと呼ばれるが、それを過去の株価を使ったHistorical Volatilityとオプション価格を使ったImplied Volatilityから、定量的に観測していく。

2. IndexのDaily Returnの観測 (Historical Volatilityの世界)

過去3年間に渡って、日経225平均とS&P500のDaily Returnを計測した。ここでいうDaily Returnは、新聞・ニュースなどに記載されている 当日引値÷前日引値－1 で計算されるのではなく、自然対数eを底とするログ (Lnと表記する) でLn(当日引値÷前日引値)で計算した対数リターンを用いている。

全データ数は日経733営業日、S&P755営業日、それぞれReturnの標準偏差は2.13%と1.93％となった。これらの指数が対数正規分布をすると仮定した時、この標準偏差の値をDaily Returnの1σに相当すると表現し、その仮定の下では、±1σに収まる確率は68.26%、-2σ～-1σ,1σ～2σの範囲は27.18%、-3σ～-2σ,2σ～3σは4.3%、±3σ以上動くことは0.26%しかないことになる。

一般に、この標準偏差に$\sqrt{営業日}$を乗ずることで年率換算した数値をボラティリティ、あるいは、Historical Volatility(HV)と呼ぶ。日本の場合、年間約244営業日、アメリカの場合は、約252営業日あることになる。若干、話がそれるが、ひと口にHVと言っても計算方法は複数あるので、このように計算過程や手法を示さないと、意義が薄くなる。

対数リターンを取る周期:上記は毎日の引値だが、毎週、毎月、5分など様々ある。
母集団の数:上記の3年に対して、1ヶ月　HVなど、参照期間によるサンプル数の違い。
計算手法:上記はクラシカルなClose to Close(引値)だが、Parkinson法など日中の値動きを反映させる手法もある。
年率換算法:年間の営業日数の想定。
その他調整法:個別株式の場合、単なる価格比較のリターンではなく、配当落ち日のリターンに、期待配当額を考慮しているかどうか　など。

実際に観測した3年分のヒストリカルのDaily Returnを、標準偏差1σ毎に区切って営業日を数え、確率的に計算できる正規分布を仮定した理論上の数値と比較してみた。

σ	確率	日経225実測	日経(正規分布仮定)	S&P500実測	S&P(正規分布仮定)
~−5	0.000%	1日	0.00021日	0日	0.00022日
−5~−4	0.003%	3日	0.02300日	4日	0.02370日
−4~−3	0.132%	5日	0.96626日	4日	0.99526日
−3~−2	2.140%	11日	15.68637日	16日	16.15718日
−2~−1	13.591%	69日	99.61845日	63日	102.60837日
−1~−0	34.134%	281日	250.20570日	262日	257.71528日
0~+1	34.134%	293日	250.20570日	334日	257.71528日
+1~+2	13.591%	55日	99.61845日	52日	102.60837日
+2~+3	2.140%	12日	15.68637日	13日	16.15718日
+3~+4	0.132%	1日	0.96626日	5日	0.99526日
+4~+5	0.003%	1日	0.02300日	0日	0.02370日
+5~	0.000%	1日	0.00021日	2日	0.00022日

まずは、観測が容易なKurtosisから説明する。±3σ以上、株価が動く日は、対数正規分布を仮定した場合の理論上の確率は0.3%程度、3年間733営業日のうち、2日だけそのような大きな動きがあることが期待される。

一方、3年間の実測値では、日経で12日、S&Pでも15日観測され、分布は標準正規分布よりも末広がり(Fat Tail)であることがわかる。

つぎにSkewnessを見る。標準正規分布では、確率の欄を見るとわかるように、上下の分布に完全なる対称性を持つ。一方、実測の-1σ~0と0～1σを見ると、明らかに偏りがある。1σという小さな動きをしている時は、株価は上昇する傾向が強い、これは、株価は上がる時はゆっくりあがるということを意味している。一方、大暴落や大暴騰(3σ以上の領域)を見ると、-3σ以上の下げは、日経で9回、S&Pで8回、+3σ以上の上げは、日経で3回、S&Pで7回となる。あるいは、1σ～2σ程度の動きにも非対称性は顕著に現れている。日経は－2σ～－1σの領域に69日、S&Pは63日、一方、+1σ～+2σの領域には、日経が55日、S&Pが52日となっている。実測値は、株価の振る舞いは、暴騰よりも暴落が多い分布であることを示しており、このような分布の上下の非対称性をSkewnessという。

3. 取引可能なボラティリティ (Implied Volatilityの世界)

上記で見たように、実際の株価の振る舞いは、正規分布とは異なることが確認できた。株価は対数正規の幾何ブラウン過程で振る舞うと想定した理論 Black-Scholes方程式に基づいて、オプションは値付けされると言われているが、オプション市場で取引できる価格は実際の株価の振る舞いから期待される予想、需給であり、理論から導き出されるものではない。

トレーディングの現場における基本原則は、取引できることである。実は、理論上の要請である完備な市場(Complete Market)も同様に、取引可能な株や債券を用いてデリバティブを複製できることを想定している。ゆえに、これからImplied Volatilityを計算していく上で使う全ての数値は取引できるモノの値、もしくは取引できるモノから計算される数値にまで落とし込む。

日経225オプションを例にとって説明すると、オプションの取引価格は、大証取引日報(http://www.ose.or.jp/market/daily_report/)などで、簡単に確認できる。プット/コール、満期、

行使価格毎に様々な値段がついている。満期ごとにForward Priceが存在し、それは先物、もしくは、Put Call Parityより、Forward PriceのFは右記のように$F = C - P + Xe^{-rT}$
r: リスクフリーレート, T:満期までの時間 X: 行使価格, C: コールの値段、P: プットの値段で表現される。

上記のPut Call Parityで不明瞭なのはrだけで、rは通常Swap、もしくは短期の場合は金利先物からImplyされる金利を使うことになる。いわゆるオプションの理論・金融工学の教科書には$F = Se^{(r-q)T}$と記述されている。S:株価、q:期待配当率で、いずれも不明瞭で取引が可能ではない。テレビ画面上に表示される日経225平均の値はあくまで直近値の平均なので、Ask/Bidという考えもなければ、実際に取引できる価格でもない。期待配当は先物もしくは、OTCを使ったとしても、Dividend Swapという形で年度毎の期待配当額をSwapするのが標準的で、オプションの満期に応じたDividend Swapが常時、狭いスプレッドで取引できるわけではない。ましてや配当”率”なるものはトレーダブルではない。
さて、Put Call ParityによるForwardのPricingに話を戻すと、とある満期において、行使価格毎にForward Priceが並ぶ。その最良気配をもって、Forward Priceを得ることができる。
そして、いよいよImplied Volatilityの計算の下地が整ったので、Black-Scholes方程式の出番となる。取引できない現値Sではなく、取引可能なForwardで記述すると

$$Call = e^{-rT}[FN(d_1) - XN(d_2)], d_1 = \frac{\ln(F/X) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}, d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

となるあまりにも有名な式であるが、現時点で不明瞭なのはσ唯一つである。
一見、方程式の答えかのように見える左辺のCallの価格も取引所から取ることができる。
現場において、Black-Scholesの答えは、オプション価格ではなく、σであり、そのσのことをImplied Volatility(IV)と呼ぶ。

HVは、あるアンダーラインングと期間につき、一意的に定められ、”過去から現在まで”の株価の分布の実績値なのに対して、IVは行使価格毎に計算される”現在から満期までの将来”の市場予想値である。IVは特定の行使価格のオプションの需給を示す正規化された指数と言って良いだろう。この計算過程を知っていれば、世の中でよくある誤解であるHVとIVを比較して割高、割安を論じたり、HVをBlack-Scholesに入れて計算したプレミアムを”理論値”と呼んだりすることがナンセンスというのがわかるであろう。期先と期近のIVや、At

The Money(ATM)とOut of The Money(OTM)のIVを比較し、需給を見るのが一般的である。株価は幾何ブラウン運動ではないということをオプションの市場参加者は知っており、その思惑はオプション価格に直接反映され、どの程度、幾何ブラウンからずれているかはIVを比較することで知ることができる。

4. オプション価格から観測するSkewnessとKurtosis

株価が幾何ブラウン運動をしているならば、IVは行使価格によらず一定の水準で取引されるはずである。非幾何ブラウン性の一要素であるSkewnessの観測方法として代表的な取引を示す。

Skewnessは、Risk Reversal、下方のPutを買って、上方のCallを売る取引の価格に現れる。価格には、株価の絶対水準の要素が入るため、標準化するために、IVの差(CallのIV－PutのIV)で表現しても良い。ただし、注意すべきは、強いSkewnessは、株価が下がるということを示唆しているのではなく、上がる時の速度と下がる時の速度が違うということを示している。

Kurtosisは、Butterfly、ATMのCallとPutを売り、OTMのPutとCallを買う取引の価格に現れる。これも同様にIVの差(OTMのIV－ATMのIV)で表現すると標準化できる。ATM、現値近辺のオプションに比べ、遠く離れたオプションのIVが高いということは、正規分布よりも高い確率で、暴騰、暴落が起きることを市場参加者が期待していることの現れである。

At the money Volatility：ここでは簡単のため、現値に最も近い行使価格を持つオプションのIV
Risk ReversalとButterflyに登場するOTM Optionの行使価格は、±10%程度の幅で現値からずれているものを観測する。

ここで、世界を代表する特色ある4つのオプション市場から、上記の方法で計算し、直近の限月、そして、その次の限月のオプションの値をそれぞれ数値化してみた。

	ATM Volatility		Skewness		Kurtosis	
	1Month	2Month	1Month	2Month	1Month	2Month
日経225平均	20.47	20.64	-5.64	-5.65	3.61	2.30
S&P500	17.06	17.98	-13.06	-10.65	6.90	1.58
ユーロストック50	20.81	21.93	-11.05	-9.19	3.74	1.54
香港ハンセン	19.53	21.08	-4.50	-3.98	2.57	1.97

まずは、単純なIVの水準の比較として、左のATM Volatilityを見る。直感的なイメージとして、エマージングマーケットほどボラティリティが高い傾向があるが、現在は、この4市場のうち、最も未開と思われる香港市場のIVはそれほど高くない。

次にSkewnessとKurtosisを見る。いずれも0が標準正規分布なので、0から遠い値になるほど、正規分布とは異なる分布であることを示す。特にSkewnessは欧米市場で、強い傾向がある。情勢によって変化はあるが、この傾向は市場特性として継続的に言えることである。

先進国市場ほど、効率的市場に近づき、理論に近い正規分布的な美しい振る舞いをするような気がするが、実測値はHVもIVも逆の傾向を示しており、歴史と流動性がある欧米市場が、正規分布とは離れた分布をしていることがわかる。この現象を合理的に説明するための根拠としては、効率性の高い市場では、株価がニュースを織り込む際に、ニュース(新しい情報)を基に、即座にバリュエーションされ、マーケットコンセンサスが一瞬で出来上がり、そこに株価が修正される。これをJump Diffusionと呼ぶ。一方、エマージングでは、市場参加者が少なく、レベルも低いので株価自身に迷いがあり、一瞬でジャンプしてそこに落ち着くという動きは見られず、コンセンサスが出来上がるまでフラフラと数日かかる。

効率性の高い市場で観測される株価の不連続の変化(Jump Diffusion)は、連続的な株価変化を想定している確率微分方程式で表される幾何ブラウン運動には含まれていない。米国市場の個別銘柄はこの傾向がさらに顕著であるが、売買代金、ニュース、カバーしているアナリストの多さ、市場参加者の多様性は世界でも群を抜いている。四半期決算発表による、マーケットコンセンサスの瞬時の変化は、人為的な不連続の変動であり、一方、マーケットコンセンサスを確立できないエマージング市場の株価の揺らぎは、Wiener過程で記述される”乱数”の動きに近いのである。■