Realized Volatility を用いた日経225オプション価格の導出*

一橋大学経済研究所教授 渡部敏明

1. はじめに

オプション価格を決定する重要な変数に原資産価格のボラティリテがある。ブラックショールズモデルではボラティリティを時間を通じて一定であると仮定するが、現在ではボラティリティは確率的に変動するとの考えが主流になっており、ノーベル経済学賞を受賞した Robert Engle 教授の ARCH モデルとその改良版 (本稿ではそうしたモデルを ARCH 型モデルと呼ぶ) や Stochastic Volatility モデルなど、ボラティリティの変動を表すさまざまな時系列モデルが提案されている (詳しくは、渡部 (2000) 参照)。しかし、こうしたモデルを用いてボラティリティを推定する場合、モデルが間違っていれば、ボラティリティの推定値も正しくない。

そこで、近年では、これらのモデルに代わって、Realized Volatility と呼ばれる新たなボラティリティの推定量が注目を集めている。Realized Volatiliy は日中リターンの 2 乗を 1 日分足し合わせたものなので、ボラティリティのモデルに依存しない。また、Realized Volatility は、計算に用いる日中リターンの時間間隔を 0 に近づけると、真の日次ボラティリティに確率収束する (ただし、実際の資産価格はマイクロストラクチャノイズを含むので、必ずしもそうならない)。そこで、時間間隔の短い日中リターンを使って計算すれば、真のボラティリティの精度の高い推定量になる。さらに、Realized Volatility を用いて将来のボラティリティを予測すると、ARCH 型モデルを用いた場合と比べて、将来のボラティリティの予測パフォーマンスが高いことが明らかになっている（渡部・佐々木 (2007)、渡部 (2008))。

しかし、Realized Volatility のオプション価格への応用はまだあまり行われていないので、Ubukata and Watanabe (2009) において、日経 225 株価指数の Realized Volatility が日経 225 オプションの価格変動を捉える上で有用であるかどうか分析を行った。本稿ではその一部を紹介する。

2. Realized Volatility と ARFIMA(X) モデル

資産価格のボラティリティはショックの持続性が高いことが知られており、この現象はボラティリティ・クラスタリングと呼ばれる。特に、Realized Volatility の場合、長期記憶過程に従っているとの研究結果が数多く得られている。ある変数の k 次の自己相関係数を $\rho(k)$ とすると、$\sum_{k=0}^{\infty} |\rho(k)| < \infty$ であるとき、短期記憶過程に従うといい、$\sum_{k=0}^{\infty} |\rho(k)| = \infty$ のとき、長期記憶過程に従うという。

Ubukata and Watanabe (2009) では、長期記憶性を考慮して、Realized Volatility の自然対数値 $\log(RV_t)$ を次の ARFIMA$(0, d, 1)$ モデルで定式化している。

$$(1 - L)^d \left(\log(RV_t) - \mu\right) = u_t + \theta u_{t-1}, \quad u_t \sim NID(0, \sigma^2) \tag{1}$$

ここで、μ は $\log(RV_t)$ の無条件の平均、$u_t \sim NID(0, \sigma^2)$ は誤差項 u_t が平均 0、分散 σ^2 の過去と独立な正規分布に従うことを表している。L はラグオペレータを表す ($L^k X_t = X_{t-k}$)。このモデルは、$d = 0$ であれば、定常な ARMA$(0, 1)$ モデルになり、$d = 1$ であれば、非定常な ARIMA$(0, 1, 1)$ モデルになる。ARFIMA モデルでは、d の値として 0 から 1 までの実数値も許容する (d は負の値も取りうるが、ここでは考えない)。$0 < d < 0.5$ であれば、$\log(RV_t)$ は定常な長期記憶過程に従い、$0.5 \leq d < 1$ であれば、非定常な長期記憶仮定に従う。$(1 - L)^d$ は、$L = 0$ でテーラー展開すると、以下のように表せる。

$$(1 - L)^d = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(d-1)\cdots(d-k+1)}{k!}(-L)^k \tag{2}$$

*本研究は、文部科学省科学研究費補助金「高頻度データを用いた日本の証券市場の計量分析」と一橋大学グローバル COE プログラム「社会科学の高度統計・実証分析拠点構築」から助成を受けている。

長期記憶性や ARFIMA モデルについて詳しくは、Beran (1994)、田中 (2006)、松葉 (2007)、矢島 (2003) 等を参照されたい。

株式市場では、株価が上がった日の翌日よりも下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇する傾向があることが知られている。ARFIMA モデルではこうしたボラティリティ変動の非対称性を捉えることができないので、Ubukata and Watanabe (2009) では、さらに以下の ARFIMA$(0, d, 1)$-X モデルを用いている。

$$(1-L)^d(\log(RV_t) - \mu_0 - \mu_1|R_{t-1}| - \mu_2 D_{t-1}^{-}|R_{t-1}|) = u_t + \theta u_{t-1}, \quad u_t \sim NID(0, \sigma^2) \tag{3}$$

ここで、R_{t-1} は $t-1$ 日の日次リターン、D_{t-1}^{-} は R_{t-1} が負であれば 1、それ以外では 0 をとるダミー変数である。 μ_2 が正であれば、株式市場のボラティリティ変動の非対称性と整合的になる。

Ubukata and Watanabe (2009) では、ARFIMA および ARFIMAX モデルのパラメータを Beran (1995) の近似最尤法によって推定している。この推定法について詳しくは、渡部・佐々木 (2006) を参照されたい。

3. オプション価格の導出

$t-1$ 日と t 日の原資産価格の終値を S_{t-1}、S_t とし、t 日の日次リターンを以下のように定義する。

$$R_t = \log(S_t) - \log(S_{t-1}) \tag{4}$$

Ubukata and Watanabe (2009) では、投資家の危険中立性と日次リターンの誤差項の正規性を仮定してオプション価格を導出している。これらの仮定の下では、日次リターンは以下のように定式化される。

$$R_t = r - d - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \epsilon_t, \quad \epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim NID(0,1) \tag{5}$$

ここで、r と d はそれぞれ連続複利計算した安全資産の金利と配当率を表す。

投資家の危険中立性を仮定すると、オプション価格は、満期におけるオプションの価値の期待値の割引現在価値となる。例えば、権利行使価格 K、残存期間 τ のプットオプションの T 日における理論価格は以下のようになる。

$$P_T = \exp(-r\tau)E\left[\mathrm{Max}(K - \tilde{S}_{T+\tau}, 0)|\boldsymbol{I}_T\right] \tag{6}$$

ここで、$\tilde{S}_{T+\tau}$ はオプションの満期 $T+\tau$ 日における原資産価格、$\boldsymbol{I}_T$ は T 日における情報集合を表す。

ボラティリティが変動する場合、(6) 式の期待値は解析的に求められないので、Ubukata and Watanabe (2009) では、それをシミュレーションによって数値的に計算している。(4)、(5) 式と (1) 式もしくは (3) 式を使ってオプションの満期における原資産価格 $\tilde{S}_{T+\tau}$ のシミュレーションを行い、$(S_{T+\tau}^{(1)}, \ldots, S_{T+\tau}^{(m)})$ が得られたとする。このとき、(6) 式は以下のように計算できる。

$$P_T \approx \exp(-r\tau)\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\mathrm{Max}(K - S_{T+\tau}^{(i)}, 0) \tag{7}$$

Ubukata and Watanabe (2009) では、$m = 10000$ とし、分散減少法として制御変数法と Duan and Shimonato (1998) の経験マルチンゲール法を用いている。

4. ARCH 型モデル

比較のため、Ubukata and Watanabe (2009) では、以下の 3 つの ARCH 型モデルを用いたオプション価格の導出も行っている。

(1) GARCH$(1,1)$ モデル

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\epsilon_{t-1}^2, \quad \omega > 0,\ \beta, \alpha \geq 0,\ \beta + \alpha < 1 \tag{8}$$

ここで、ϵ_{t-1} は日次リターンの式 (5) の誤差項の $t-1$ 日の値である。これは Bollerslev (1986) によって提案されたモデルで、ボラティリティが負にならないよう、パラメータ ω, β, α に非負制約が必要になる。また、$\beta+\alpha<1$ であれば、ボラティリティは定常性を満たし、ボラティリティのショックは時間とともに減衰するが、$\beta+\alpha$ が 1 に近ければ近いほど、減衰のスピードは遅くなる。そこで、このモデルはボラティリティのショックの持続性を捉えることができるが、$\beta+\alpha<1$ であれば短期記憶モデルであり、ボラティリティの長期記憶性は考慮できない。また、このモデルは株式市場におけるボラティリティ変動の非対称性も考慮できない。

(2) EGARCH$(1,0)$ モデル

$$\log(\sigma_t^2) \;=\; \omega + \phi\left(\log(\sigma_{t-1}^2) - \omega\right) + \theta z_{t-1} + \gamma\left(|z_{t-1}| - E\left(|z_{t-1}|\right)\right), \quad |\phi| < 1 \tag{9}$$

これは Nelson (1991) によって提案されたモデルで、上記 GARCH モデルが σ_t^2 の変動を定式化するのに対して、このモデルはその自然対数値 $\log(\sigma_t^2)$ の変動を定式化する。そこで、パラメータに非負制約は必要ない。また、このモデルはボラティリティ変動の非対称性を考慮しており、$\theta<0$ であれば、株価が上がった日の翌日よりも下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇する傾向があるという事実と整合的になる。 このモデルでは、$|\phi|<1$ であれば、ボラティリティの対数値は定常性を満たし、ϕ が 1 に近いほどボラティリティのショックの減衰のスピードは遅くなる。しかし、このモデルも、$|\phi|<1$ であれば短期記憶モデルであり、ボラティリティの長期記憶性は考慮できない。

(3) FIEGARCH$(1,d,0)$ モデル

$$(1-\phi L)(1-L)^d\left(\log(\sigma_t^2) - \omega\right) = \theta z_{t-1} + \gamma(|z_{t-1}| - E(|z_{t-1}|)), \quad |\phi| < 1 \tag{10}$$

これは Bollerslev and Mikkelsen (1996) によって提案されたモデルで、上記 EGARCH モデルをボラティリティの長期記憶性を考慮して拡張したものである。このモデルは、$d=0$ であれば EGARCH モデル、$d=1$ であれば IEGARCH モデルになり、$0<d<0.5$ であればボラティリティの対数値は定常な長期記憶過程、$0.5 \leq d < 1$ であれば非定常な長期記憶過程に従う。

Ubukata and Watanabe (2009) では、日次リターンを (5) 式として、これらのモデルのパラメータを最尤推定している。ARCH 型モデル (特に FIEGARCH モデル) の最尤推定について詳しくは、竹内 (野木森)・渡部 (2008) を参照されたい。

5. データ

Ubukata and Watanabe (2009) では、日経 225 株価指数の Realized Volatility と日次リターンを用いて ARFIMA(X) モデルと ARCH 型モデルを推定し、そこから残存期間 1 か月の日経 225 プットオプションの理論価格を導出し、市場価格と比較している。日経 225 株価指数の Realized Volatility は、1 分毎の日経 225 株価指数データを用いて計算している。ただし、東京証券取引所の取引時間は、9:00–11:00（前場）と 12:30–15:00（後場）なので、前日の 15:00–9:00 (夜間) と 11:00–12:30 (昼休み) の間は 1 分毎の価格が得られない。夜間と昼休みのリターンは時間間隔が長いので、そのまま 2 乗して加えると、時間の離散化による誤差が膨らむ可能性があるので、Ubukata and Watanabe (2009) では、Hansen and Lunde (2005) の方法を用いている。この方法では、まず、市場が開いている時間

帯の 1 分毎のリターンのみを使って Realized Volatility を計算し (それを $RV_t^{(o)}$ とする)、それに下記のように定数を掛けて調整する。

$$RV_t = cRV_t^{(o)}, \quad c = \sum_{t=1}^{T}(R_t - \overline{R})^2 / \sum_{t=1}^{T} RV_t^{(o)} \tag{11}$$

ここで、T はサンプル数、$\overline{R}$ は日次リターンの標本平均を表す。こうすると、Realized Volatility の標本平均が日次リターンの標本分散と等しくなる。

東京証券取引所の株式の取引終了時刻が 15:00 であるのに対して、大阪証券取引所の日経 225 オプションの取引終了時刻は 15:10 である。そこで、日経 225 オプション価格は終値ではなく、15:00 の価格を用いるのが望ましい。しかし、15:00 に価格がついていないオプションがあるため、Ubukata and Watanabe (2009) では、14:00 から 15:00 までで買い気配値と売り気配値が両方ついていて最も 15:00 に近い時刻の買い気配値と売り気配値の平均値を市場価格として用いている。約定価格ではなく、買い気配値と売り気配値の平均値を用いているのは、約定価格は bid-ask bounce によるマイクロストラクチャノイズを含むからである (Campbell, Lo and Mackinlay (1997) Chapter 3)。安全資産の金利 r には CD レートを用い、配当率 d は Nishina and Nabil (1997) に従い 0.5% で固定している。

具体的には、最初に、残存期間 1 か月のオプションが取引されている 2001 年 4 月 11 日の日経 225 プットオプションの理論価格を以下のように導出している。まず、前日の 2001 年 4 月 10 日までの 1200 日間の日経 225 株価指数の Realized Volatility と日次リターンを用いて ARFIMA(X) モデルと ARCH 型モデルのパラメータを推定する。ここで、(11) 式の調整係数 c も同じ 1200 日間の日経 225 株価指数の Realized Volatility と日次リターンを用いて計算している。次に、その推定値と 2001 年 4 月 11 日の 15:00 の日経 225 株価指数と CD レートを用いてその日の 15:00 における残存期間 1 か月の日経 225 プットオプションの理論価格を取引されているすべての権利行使価格について導出する。その次に残存期間 1 か月のオプションが取引されている日は 2001 年 5 月 9 日なので、その日の 15:00 におけるる残存期間 1 か月の日経 225 プットオプションの理論価格をすべての権利行使価格について同様に導出する。以上を 2007 年 9 月まで繰り返し、計 730 の日経 225 プットオプションの理論価格を計算している。

6. 結果

Ubukata and Watanabe (2009) では、以下の 4 つの損失関数を用いて各モデルのパフォーマンスを比較している。

$$MAE = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|\tilde{P}_i - P_i\right|, \quad RMSE = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\tilde{P}_i - P_i\right)^2}$$

$$RMAPE = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\tilde{P}_i - P_i}{\tilde{P}_i}\right|, \quad RMSPE = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\tilde{P}_i - P_i}{\tilde{P}_i}\right)^2}$$

ここで、N は比較に用いたオプションの数で、具体的には $N = 730$ である。また、$\tilde{P}_i$ は各モデルから導出された i 番目のオプションの理論価格、P_i は市場価格である。

結果は表 1 の通りである。表 1 の BS は、ブラックショールズモデルによってオプション価格を計算した結果を表している。そこでは、ボラティリティを過去 20 日間の日次リターンの標本標準偏差としている。 また、* は、各損失関数で最も値が小さいことを示している。表 1 では、すべての損失関数で ARFIMAX の値が最も小さくなっており、このことは、Realized Volatility をボラティリ

ティの長期記憶性と非対称性を考慮した ARFIMAX モデルで定式化した場合が日経 225 プットオプションの価格変動を最も正確に捉えていることを示している。

表 1

	RMSE	MAE	RMSPE	MAPE
GARCH	51.935	33.083	0.599	0.351
EGARCH	52.743	35.022	1.086	0.516
FIEGARCH	48.308	31.027	0.958	0.413
ARFIMA	48.466	29.134	0.427	0.283
ARFIMAX	47.820*	28.926*	0.418*	0.278*
BS	62.029	36.684	0.538	0.375

Ubukata and Watanabe (2009) は、さらに以下の結果も示している。(1) マイクロストラクチャノイズを考慮して、Hansen and Lunde (2006) の提案している Bartlett カーネルを用いて Realized Volatility を計算してもパフォーマンスは改善しない。(2) Hansen and Lunde (2005) の方法ではなく、昼休みと夜間のリターンの 2 乗を加えて Realized Volatility を計算した場合にはパフォーマンスが悪くなる。(3) ARCH 型モデルの下で危険中立性を仮定しないでオプション価格を求める方法を Duan (1995) が提案しているが、この方法を用いてもパフォーマンスは改善しない。

参考文献

Beran, J. (1994), *Statistics for Long-Memory Processes*, Chapman & Hall.

Beran, J. (1995), "Maximum likelihood estimation of the differencing parameter for invertible short and long memory autoregressive integrated moving average models," *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **57**, 659–672.

Bollerslev, T. (1986), "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, **31**, 307–327.

Bollerslev, T. and Mikkelsen, H.O. (1996), "Modeling and pricing long memory in stock market volatility," *Journal of Econometrics*, **73**, 151–184.

Campbell, J.Y., Lo, A.W. and MacKinlay, A.C. (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press. (祝迫得夫・大橋和彦・中村信弘・本田俊毅・和田賢治訳 (2003)『ファイナンスのための計量分析』共立出版.)

Duan, J.-C. (1995), "The GARCH option pricing model," *Mathematical Finance*, **5**, 13–32.

Duan, J.-C. and Shimonato, J.-G. (1998), "Empirical Martingale simulation for asset prices," *Management Science*, **44**, 1218–1233.

Hansen, P.R. and Lunde, A. (2005), "A forecast comparison of volatility models: does anything beat a GARCH(1,1)?" *Journal of Applied Econometrics*, **20**, 873–889.

Hansen, P.R. and Lunde, A. (2006), "Realized variance and market microstructure noise," *Journal of Business & Economic Statistics*, **24**, 127–161.

Nelson, D.B. (1991), "Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new apprioach," *Econometrica*, **59**, 247–370.

Nishina, K. and Nabil, M.N. (1997), "Return dynamics of Japanese stock index options," *Japanese Economic Review*, **48**, 43–64.

Ubukata, M. and Watanabe, T. (2009), "Option pricing using realized volatility and ARCH type models," mimeo.

竹内 (野木森) 明香・渡部敏明 (2008)「日本の株式市場におけるボラティリティの長期記憶性とオプション価格」『現代ファイナンス』No.3, 45–74.

田中勝人 (2006)『現代時系列分析』岩波書店.

松葉育雄 (2007)『長期記憶過程の統計–自己相似な時系列の理論と方法』共立出版.

矢島美寛 (2003)「長期記憶をもつ時系列モデル」刈屋武昭・矢島美寛・田中勝人・竹内啓著『経済時系列の統計 その数理的基礎』第 II 部, pp.103–202, 岩波書店.

渡部敏明 (2000)『ボラティリティ変動モデル』朝倉書店.

渡部敏明 (2007)「Realized Volatility–サーベイと日本の株式市場への応用」『経済研究』Vol.58 No.4, 352–373.

渡部敏明・佐々木浩二 (2006)「ARCH 型モデルと "Realized Volatility" によるボラティリティ予測とバリュー・アット・リスク」『金融研究』第 25 巻別冊第 2 号, pp.39–74.