

日本版モデルフリー・ボラティリティ・インデックス

大阪大学大学院経済学研究科 大屋幸輔*1

1 はじめに

市場のリスクの計測は、関連する派生商品の価格付けのみならず、リスク管理や将来の市場の動向を探る上でも重要な課題である。このような金融市場に関するリスク・マネジメントに関わる研究を行い、社会にその成果を還元することを一つの活動目的として、大阪証券取引所の協力のもと大阪大学の金融保険教育研究センター（Center for the Study of Finance and Insurance, 以降 CSFI）では、大阪証券取引所寄付部門を 2007 年 6 月に設置し、その活動を続けている。本稿では CSFI が 2008 年 7 月から公開している日本の株式市場における将来のボラティリティに対する一つの指標である Volatility Index Japan (以降、VXJ) の紹介を行う。

2 ボラティリティ・インデックス

ボラティリティは原資産価格の変動をあらわす指標であるが、それ自体は市場で観測されるものではなく、観測価格データをもちいて、推定することによって得られるものである。既に実現している過去の原資産価格の系列からその標準偏差を求める方法がもっとも単純な計測方法であり、(一日に一つ観測される) 観測データを過去数十日分利用することから、この方法によって得られるボラティリティはヒストリカル・ボラティリティと呼ばれている。ただしこの場合、推計に利用しているデータの期間中は価格変動の水準は一定である、ということ暗黙裏に仮定している。一方、GARCH モデルに代表されるボラティリティの推計方法は、過去数十日分の観測データを利用する点ではヒストリカル・ボラティリティと同じであるが、ボラティリティの変動を許容するようにモデル化されており、一日に一つの観測データしか利用できない状況では有用なアプローチとなっている。

他方、インプライド・ボラティリティは市場で観測されるオプション価格から逆算して求められるもので、代表的なものにブラック・ショールズ (BS) 公式を利用したものがある。この BS 公式は原資産価格が従うと想定されている確率過程において、そのボラティリティを一定と仮定している。しかし実際に計測されたインプライド・ボラティリティはオプションの行使価格や残存期間に依存しており、必ずしも想定している理論との整合性は満たされていないが、その簡便さから広く利用されている。

上述したアプローチは一日に一つ観測される原資産価格、あるいは一組のオプション価格を念頭に考案されたものであるが、近年のデータ管理技術の発展とともに、より高頻度に観測されるデータ系列を利用してボラティリティ（実際はボラティリティの二乗である分散）を推定する方法として、実現分散 (Realized Variance、以降 RV) に関する研究が進んでいる。

*1 大阪大学金融保険教育研究センター兼任

時点 t での原資産価格を $S(t)$ として、この $S(t)$ が従う確率過程を

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu(t) + \sigma(t)dW(t) \quad (1)$$

とし、 $\mu(t)$ と $\sigma(t)$ は任意の時間と他のパラメータの関数とする。この $\sigma(t)$ に関する特定化は $\sigma(S(t), t)$ と原資産価格と時間に依存させた形も含んでいる。

第 t 日において、市場が開いてから閉じるまでに価格が観測された時点を t_0, t_1, \dots, t_n とし、第 i 番目に観測された原資産価格を $S(t_i)$ 、さらに対数収益率を $r(t_i) = \ln S(t_i) - \ln S(t_{i-1})$ とする。このとき以下の RV_t を第 t 日の RV とよび、それは累積分散 (Integrated Variance) IV_t の一致推定量となっている。

$$RV_t = \sum_{i=1}^n r(t_i)^2, \quad IV_t = \int_{t_0}^{t_n} \sigma^2(s) ds \quad (2)$$

この IV_t は第 t 日のボラティリティの指標 (実際にはその二乗) として、第 t 日に観測されるデータに基づいて RV_t として推定されている。この RV は実現分散という名前の示すとおり、これまでに実現した原資産価格の変動を計測したものとなっている。一方で、シカゴ・オプション取引所 (CBOE) で公開されている VIX は、市場が期待する将来のボラティリティをオプション価格から求めたもので、モデルに関して比較的少ない仮定のもとで導出されることから、モデルフリー・インプライド・ボラティリティ (以降、MFIV) とも呼ばれている。

この MFIV を日本の株式市場に適用した研究は、Nishina, *et. al.*(1996)、Maghrebi(2007)、渡部 (2007)、山口 (2008)、杉原 (2009) と数多くある。これらの研究において推定された MFIV の利用は、いずれも個別の研究目的にとどめられているが、大阪大学 CSFI では学術研究を目的として 2008 年 7 月より MFIV を VXJ として公開している (<http://www-csfi.sigmath.es.osaka-u.ac.jp/structure/activity/vxj.php>)。原資産価格過程に関して、ジャンプを許容する形で Jiang and Tian (2007) の方法もあるが、CBOE の VIX をはじめドイツの VDAX などとの比較を念頭において、CSFI での VXJ は CBOE の方法に準拠している。

MFIV の基本的なアイデアは、Breed and Litzenberger (1978) で提示されたオプション価格と原資産価格の確率密度関数との関係式

$$p(S(T), T; S(t), t) = \left. \frac{\partial^2 C(S(t), K, t, T)}{\partial K^2} \right|_{K=S(T)} = \left. \frac{\partial^2 P(S(t), K, t, T)}{\partial K^2} \right|_{K=S(T)} \quad (3)$$

に基づいている。ここで C と P はそれぞれ割引前のコールとプット価格で、 K はそれらの権利行使価格である。このオプション価格と確率密度との関係を使った以下の MFIV の導出は、Gatheral (2006, chapter 11) による。一般的に原資産からの派生商品の時点 T でのペイオフを $g(S(T))$ とすれば、時点 t でのその請求権価値は、先の確率密度 $p(\cdot)$ のもとでの期待値として

$$\begin{aligned} E [g(S(T)) \mid S(t)] &= \int_0^\infty g(K) p(K, T; S(t), t) dK \\ &= \int_0^F g(K) \frac{\partial^2 P(K)}{\partial K^2} dK + \int_F^\infty g(K) \frac{\partial^2 C(K)}{\partial K^2} dK \end{aligned} \quad (4)$$

と表現される。ただし F は原資産の受け渡し時点 T のフォワード価格である。この期待値は確率密度 $p(\cdot)$ による積分であるが、この確率密度に時点 T での派生商品価格に対する市場参加者の予想が織り込まれている。経済学の分野では状態価格密度 (State Price Density) と呼ばれているも

のである。\$t = 0\$ として、プットコール・パリティを利用し、積分計算を施すことにより上式はさらに以下のように変形される。

$$E[g(S(T))] = g(F) + \int_0^F P(K) g(K)'' dK + \int_F^\infty C(K) g(K)'' dK \quad (5)$$

ここで時点 \$T\$ での \$\ln(S(T)/F)\$ のペイオフを考えると \$g''(K)\$ は \$-1/K^2\$ であるので、(5) より

$$E\left[\ln\frac{S(T)}{F}\right] = -\int_0^F \frac{P(K)}{K^2} dK - \int_F^\infty \frac{C(K)}{K^2} dK \quad (6)$$

を得る。また一方で \$\ln(S(T)/F)\$ の測度 \$p(\cdot)\$ のもとでの期待値は

$$E\left[\ln\frac{S(T)}{F}\right] = E\left[\int_0^T \frac{dS(t)}{S(t)}\right] - E\left[\int_0^T \frac{\sigma(t)^2}{2} dt\right] = -\frac{1}{2}E\left[\int_0^T \sigma(t)^2 dt\right] \quad (7)$$

と表現されるので、求めるべき \$IV_T\$ の市場の予想を反映した期待値は (6) と (7) より

$$E\left[\int_0^T \sigma(t)^2 dt\right] = -2E\left[\ln\frac{S(T)}{F}\right] = 2\left(\int_0^F \frac{P(K)}{K^2} dK + \int_F^\infty \frac{C(K)}{K^2} dK\right) \quad (8)$$

と導出される。この権利行使価格 \$K\$ に関する積分表現を、離散的に観測される権利行使価格ごとのオプション価格を使って近似したものが MFIV である。広範囲にわたる権利行使価格 \$K\$ のすべてにオプション価格が観測されるわけではないので、この近似には Jian and Tian (2007) をはじめとした様々な工夫がなされている。

3 CSFI-VXJ

大阪大学 CSFI では日経 225 オプション価格の日次データにもとづいた指数を VXJ として公開している*2。図 1 は日経平均と VXJ をプロットしたものである。

日本および米国での金融市場に関連する主なイベントに対して明確な反応を示していることが確認できる。また CSFI で公開している VXJ と CBOE の VIX との関連を調べるために、2 変数 VAR モデルを推定した。推定期間は 2007 年 1 月 3 日より 2009 年 9 月 30 日で、VIX については CBOE 算出値を利用した。推定結果は以下の通りである。

$$\widehat{D\ln X}_t = -0.200D\ln X_{t-1} - 0.121D\ln X_{t-2} - 0.005D\ln J_{t-1} - 0.041D\ln J_{t-2} \quad (9)$$

(0.04) (0.04) (0.05) (0.04)

$$\widehat{D\ln J}_t = 0.449D\ln X_{t-1} + 0.129D\ln X_{t-2} - 0.225D\ln J_{t-1} - 0.077D\ln J_{t-2} \quad (10)$$

(0.03) (0.03) (0.04) (0.03)

ここで \$D\ln X\$、\$D\ln J\$ はそれぞれ、VIX と VXJ を対数変換し、1 階差分をとったもので、ラグ次数は Schwarz の情報量基準で決定した。また係数推定値の下の括弧の中の数値は推定値の標準誤差である。さらに Granger の因果性検定を行ったものと時差相関を求めたものが表 1 および表 2 である。VAR モデルの推定結果、Granger 因果性検定の結果から、米国 VIX の変化から VXJ の変化への因果関係は否定されないが、VXJ の変化から米国 VIX の変化への因果関係は否定される結果となっている。また時差相関からその関係は米国 VIX の変化と一日後の VXJ の変化への相

*2 算出に必要なデータは日経新聞社デジタルメディア総合経済データバンク NEEDS より取得している。

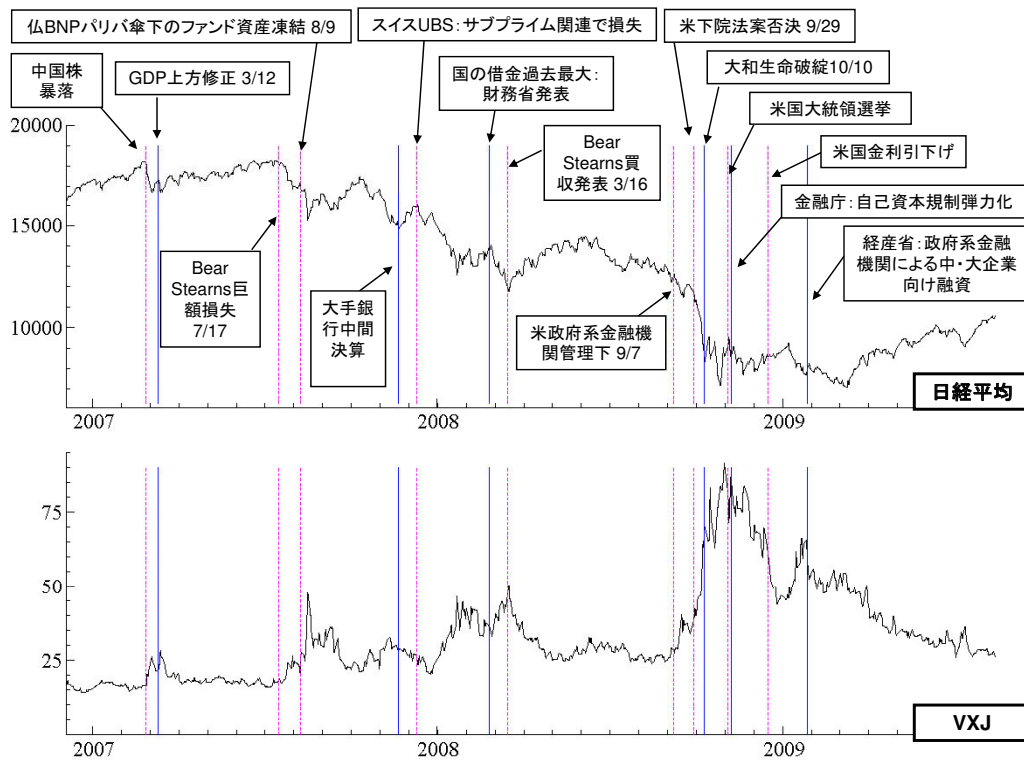


図1 日経平均と csfi-vxj

表1 Granger 因果性検定の結果

帰無仮説	F 統計量	Prob.
$DlnJ$ does not Granger Cause $DlnX$	0.487	0.615
$DlnX$ does not Granger Cause $DlnJ$	115.138	0.000

表2 時差相関

i	$DlnX, DlnJ(-i)$	$DlnX, DlnJ(+i)$
0	0.0795	0.0795
1	-0.0725	0.4682
2	-0.0314	-0.0555
3	-0.0210	0.0185
4	-0.0347	0.0401
5	0.0312	0.0372

関が顕著に観測されるのに対して、米国 VIX の変化と二日後以上たった VXJ の変化との相関は有意なものではなかった。従って米国市場において観測される市場変動は一日後には日本市場へも伝播し、その影響は二日以上離れるとなくなっていることがわかる。

4 まとめ

本稿では大阪大学 CSFI の活動の一環として公開している日本版モデルフリー・インプライド・ボラティリティである CSFI-VXJ の紹介を行った。米国で公開されている指数との比較を念頭においているため、その算出方法は CBOE の算出方法に準拠しているが、現在、CSFI では日本の市場の固有の特性を考慮した、より頑健なインデックス開発をめざし研究を進めている。今後、新しく開発される指数と従来の指数との比較など、詳細な検討を行った後に新指標は公表予定である。

参考文献

- [1] Breeden, D. and R.Litzenberger (1978) “Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices,” *Journal of Business*, 51, 621-651.
- [2] CBOE (2009) *The CBOE Volatility Index - VIX*, Chicago Board Options Exchange.
- [3] Gatheral, J. (2006) *The Volatility Surface: A Practitioner’s Guide*, Wiley Finance Series, John Wiley & Sons, New Jersey.
- [4] Jian, G.T and Y.S.Tian (2007) “Extracting Model-Free Volatility from Option Prices: An Examination of the VIX Index,” *Journal of Derivatives*, 35-60.
- [5] Maghrebi, N. (2007) “Introduction to the Nikkei 225 Implied Volatility Index,” 『経済理論』, 和歌山大学, 336, 35-55.
- [6] Nishina, K., N. Maghrebi and M. Kim (2006) “Stock Market Volatility and the Forecasting Accuracy of Implied Volatility Indices,” Discussion Papers in Economics and Business, Graduate School of Economics and Osaka School of International Public Policy, No. 06-09.
- [7] 杉原慶彦 (2009) 「わが国株式市場のモデルフリー・インプライド・ボラティリティ」, Discussion Paper Series, No.2009-J-21, 日本銀行金融研究所.
- [8] 渡部敏明 (2007) 「モデル・フリー・インプライド・ボラティリティ」, 『先物オプションレポート』, 大阪証券取引所, Vol.19, No.12.
- [9] 山口圭子 (2008) 「日経 225 株価指数のモデル・フリー・インプライド・ボラティリティの計算方法に関して：ボラティリティ予測力の観点から」, 『一橋経済学』, 第 3 巻, 29-43 頁.