「モデル・フリー・インプライド・ボラティリティ」

一橋大学経済研究所教授　渡部敏明*

１．はじめに

オプション価格からインプライド・ボラティリティ（IV）を導出する場合、これまでブラック・ショールズ（BS）公式を用いることが多かった。この公式は原資産価格のボラティリティを一定と仮定するが、近年、ボラティリティは時間とともに変動するという考えが主流になっている。もしそうであれば、BS 公式を用いて計算された IV は正しくないことになる。

そこで、原資産価格のボラティリティの変動を許容するモデル・フリー・インプライド・ボラティリティ（MFIV）が注目を集めている。実際、シカゴオプション取引所(CBOE）では、2003 年 9 月 22 日より、S&P500 の IV である VIX をこの方法を使って計算している。しかし、VIX の計算方法には問題があることが Jiang and Tian [2007] によって指摘されており、Jiang and Tian [2005, 2007] でより精緻な計算方法が提案されている。

本稿では、こうした MFIV について簡単に解説を行うとともに、Jiang and Tian [2005, 2007] の方法を用いて、日経 225 株価指数オプション価格から日経 225 株価指数の MFIV を計算する。

２．MFIV

フォワード測度の下では、フォワード価格 F_t が、

$$dF_t / F_t = \sqrt{V}_t dW_t \tag{1}$$

に従う。ここで、$\sqrt{V_t}$ は瞬時的なボラティリティ、W_t は標準ブラウン運動を表す。Jiang and Tian [2005] は(1)式にジャンプ項を加えているが、ここでは簡単化のため、ジャンプはないものとして説明する。

また、フォワードの残存期間を T 、安全資産の金利を r とし、現時点（0 時点）の原資産価格 S_0 とフォワード価格 F_0 の間に、

$$F_0 = \exp(rT)S_0 \tag{2}$$

という関係が成り立っているものとする。

このとき、以下の式が成り立つ（証明は Demeterfi et al. [1999] を参照)。

$$\begin{aligned} & E_0^F\left[\frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{dS_t}{S_t}\right)^2\right] \\ &= \frac{2}{T}[\exp(rT)(\int_0^{S_*}\frac{P(T,K)}{K^2}dK \\ &+ \int_{S_*}^{\infty}\frac{C(T,K)}{K^2}dK) + rT - \frac{S_0}{S_*}\exp(rT) \\ &+ 1 - \ln\frac{S_*}{S_0}] \end{aligned} \tag{3}$$

ここで、S_* は任意の原資産価格を表し、$P(T,K)$ と $C(T,K)$ はそれぞれ残存期間 T 、権利行使価格 K のプットオプションおよびコールオプションの現時点の価格を表す。

また、E_0^F はフォワード測度の下での現時点における期待値を表す。

* 本研究は一橋大学 21 世紀 COE プログラム「社会科学の統計分析拠点構築」および文部科学省特別研究促進費「高頻度データを用いた日本の証券市場の計量分析」より助成を受けている。また、日本銀行金融研究所の杉原慶彦氏から本稿に関して有益なコメントを頂いた。

この式は原資産のボラティリティが変動する場合でも成り立ち、この式から計算されるボラティリティを MFIV と呼ぶ。しかし、実際には、市場で取引されている権利行使価格の数は有限なので、(3)式の積分を総和で近似する必要がある。

３．VIX の計算方法

VIX は、実際に取引されているフォワード out-of-the-money（OTM）オプションの価格のみを用いて計算される。フォワード OTM オプションとは、$K < F_0$ のプットオプションおよび $K > F_0$ のコールオプションのことである。フォワード in-the-money（ITM）オプションを除くのは、価格が高く、通常、流動性が低いためである（Aït-Sahalia and Lo [1998]、Nakamura and Shiratsuka [1999] 参照）。

ここで、実際に取引されているフォワード OTM のプットオプションとコールオプションの権利行使価格を低い値から順に並べたものを、それぞれ、$K_{-n_p},\ldots,K_0$、$K_1,\ldots,K_{n_c}$ とする。このとき、VIX では、(1)式の S_* を F_0 以下で最も F_0 に近い権利行使価格 K_0 とし、さらに $\ln\dfrac{S_*}{S_0}$ を２次のテーラー展開によって近似した以下の式を用いている。

$$\sigma^2(T) = \frac{2}{T}\exp(rT)[\sum_{i=-n_p}^{0}P(T,K_i) + \sum_{i=1}^{n_c}C(T,K_i)] - \frac{1}{T}\left(\frac{F_0}{K_0}-1\right)^2 \quad (4)$$

これを各営業日ごとに最も限月の近いオプションと次に限月が近いオプションについて計算し（ただし、残存期間が８日以内のオプションについては、限月が翌月と翌々月のオプションについて計算）、線形補間によって 30 日間のボラティリティにした

$$\mathrm{VIX} = 100\times[(\frac{T_2-30/365}{T_2-T_1}T_1\sigma^2(T_1) + \frac{30/365-T_1}{T_2-T_1}T_2\sigma^2(T_2))\times\frac{365}{30}]^{1/2} \quad (5)$$

が VIX である。ここで、T_1 と T_2 はそれぞれ限月の近い方のオプションともう一方のオプションの残存期間（年表示）を表す。ただし、VIX では残存日数を時間換算することにより、より正確な計算を行っている(詳しくは、CBOE [2003] を参照)。

４．Jiang and Tian [2005, 2007]の計算方法

実際に取引されている権利行使価格の数はそれほど多くないので、(4)式を使って計算した MFIV は近似誤差が大きい可能性がある（Jiang and Tian [2007] 参照)。そこで、Jiang and Tian [2005, 2007] は、実際には取引されていない権利行使価格のオプション価格を補間する方法を提案している。

オプション価格そのものを権利行使価格の関数として近似するのは難しいため、彼らは、Shimko [1993]、Aït-Sahalia and Lo [1998] らに従い、まず BS 公式により、実際に取引されている各権利行使価格で IV (BSIV) を計算し、それらを用いて以下のように自然３次スプライン（natural cubic spline）補間している(係数の決め方などの詳細は、Press et al. [1993] の Section3.3 を参照)。

$$f(K) = BSIV_j + b_j(K - K_j) + c_j(K - K_j)^2 + d_j(K - K_j)^3, \quad (6)$$

$$K_j \le K < K_{j+1}, \quad j = -n_p, \ldots, n_c - 1$$

ただし、Jiang and Tian [2005] では、権利行使価格ではなく、マネネス K/S_0 の関数としている。

これだけでは (1)式の第 1 項の積分区間 $[0, S_*]$ の中の $[0, K_{-n_p}]$ と第 2 項の積分区間 $[S_*, \infty]$ の中の $[K_{n_c}, \infty]$ を切断することになるため、MFIV を過小評価してしまう。そこで、Jiang and Tian [2005, 2007] では、さらに $K < K_{-n_p}$、$K \ge K_{n_c}$ の範囲も考慮している。Jiang and Tian [2005] では、

$$f(K) = BSIV_{-n_p}, \quad K < K_{n_p} \quad (7)$$

$$f(K) = BSIV_{n_c}, \quad K \ge K_{n_c} \quad (7')$$

と定数にしているが、BSIV には権利行使価格が原資産価格から離れるにつれ上昇するというボラティリティ・スマイルと呼ばれる現象があり、$K < K_{-n_p}$、$K \ge K_{n_c}$ の範囲でもそうだとすると、(7)、(7')式のように定数にすると、この区間の BSIV を過小評価してしまう。そこで、Jiang and Tian [2007] では、以下のような直線近似を行っている。

$$f(K) = BSIV_{-n_p} + b_{-n_p}(K - K_{-n_p}), \quad (8)$$

$$K < K_{n_p}$$

$$f(K) = BSIV_{n_c} + b_{n_c}(K - K_{n_c}), \quad (8')$$

$$K \ge K_{n_c}$$

以下の日経 225 の MFIV の計算では、(8)式の b_{-n_p} が正もしくは(8')式の b_{n_c} が負になることがあったので、そうした場合は(7)、(7')式で近似し、それ以外は(8)、(8')式を用いている。

その上で、$2n+1$ 個の権利行使価格

$$\ln \hat{K}_i = \ln F_0 + i\Delta, \; i = 0, \pm 1, \ldots, \pm n \quad (9)$$

に対応する BSIV の値を上記の関数から計算する。以下の日経 225 の MFIV の計算では、$n = 50$ としている。また、各営業日ごとに BSIV の平均 M を計算し、$\Delta = 2\sqrt{T}M/n$ としている。こうすると、(9)式より、$\ln \hat{K}_i$ の下限と上限はそれぞれ $\ln F_0 - 2\sqrt{T}M$，$\ln F_0 + 2\sqrt{T}M$ となり、$\sqrt{T}M$ は現時点から満期までのフォワード価格変化率の標準偏差の近似値であると考えられるので、$\ln \hat{K}_i$ の値として、$\ln F_0$ を中心に $\pm 2\times$ 標準偏差の範囲まで考慮していることになる。

次に、各 $\hat{K}_i$ を BS 公式によってオプション価格に変換し、それらを用いて以下の計算を行う。

$$\sigma^2(T) = \frac{1}{T}\exp(rT) \quad (10)$$

$$\times[\sum_{i=-n+1}^{0}(\hat{K}_i - \hat{K}_{i-1})\left(\frac{P(T,\hat{K}_i)}{\hat{K}_i^2} + \frac{P(T,\hat{K}_{i-1})}{\hat{K}_{i-1}^2}\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(\hat{K}_i - \hat{K}_{i-1})\left(\frac{C(T,\hat{K}_i)}{\hat{K}_i^2} + \frac{C(T,\hat{K}_{i-1})}{\hat{K}_{i-1}^2}\right)]$$

ここでは、$S_* = F_0$としており、そうすると(3)式の$rT - \frac{S_0}{S_*}\exp(rT) + 1 - \ln\frac{S_*}{S_0}$は 0 になるので消える。また、ここでは、積分の台形近似を使っている。

５．日経 225 株価指数の MFIV

日経 225 の MFIV は Nishina et al. [2006]、Maghrebi [2007] で計算されている。しかし、彼らは VIX と同じ計算方法を用いているので、既に述べたように近似誤差が大きい可能性がある。そこで、本稿では、Jiang and Tian [2007] の方法を用いて日経 225 株価指数の MFIV を計算した。

まず、日経 225 オプション価格には、翌月が限月のものと翌々月が限月のものを用いた。それぞれについて、2005 年 7 月 1 日から 2007 年 9 月 30 日までの各営業日と実際に取引されているフォワード OTM の各権利行使価格で 14:00 から 15:00 までで最も 15:00 に近い売り気配値と買い気配値を抽出し、それらの平均値を用いた。日経 225 オプションの取引は 15:10 まであるのに 15:00 で切っている理由は、現物の取引が 15:00 で終了するので、それに時間をそろえるためである。15:00 ちょうどではなく、14:00 から 15:00 の間で選んでいるのは、15:00 に売り気配や買い気配がない場合があるためである。また、約定価格はではなく、売り気配値と買い気配値の平均値を用いるのは、売り気配値と買い気配値のどちらで約定するかわからないため、それがマイクロストラクチャー・ノイズとなり、約定価格の変化率に自己相関が生じ得るという bid-ask bounce の問題を回避するためである（詳しくは、Campbell, Lo and Mackinlay [1997] 参照）。売り気配値もしくは買い気配値が最小の呼値である 1 円の場合と、オプション価格の境界条件

$$\mathrm{Max}[0, \exp(-rT) - S_0] \le P(T,K)$$
$$\le \exp(-rT)K,$$
$$\mathrm{Max}[0, S_0 - \exp(-rT)] \le C(T,K) \le S_0$$

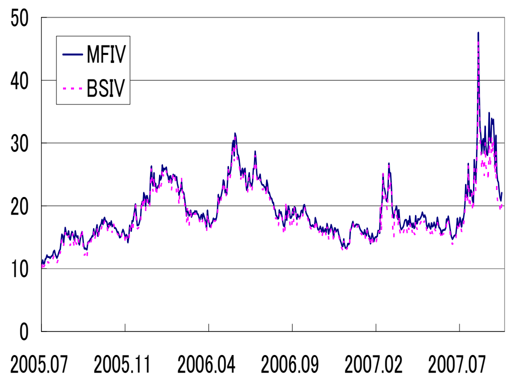
を満たさないものは、すべて削除した。以上はすべて Jiang and Tian [2005] に従っている。

原資産価格には 15:00 の日経 225 の価格(15:00 に終値が算出されている場合には終値)、安全資産の金利は、翌月物のオプションには 1 ヶ月物の CD レート、翌々月物のオプションには 2 ヶ月物の CD レートを用いた。VIX や Jiang and Tian [2007] では、フォワード価格F_0をプット・コール・パリティ式を用いて計算しているが、ここでは(2)式を用いて計算した。これらのデータと(10)式を用いて各営業日の翌月物と翌々月の MFIV を計算し、それらを(5)式のように線形補間することにより 30 日間の MFIV に直した。

また、合わせて、BS 公式によりフォワード at-the-money（ATM）オプションの IV も計算した。具体的には、(6)式に$K = F_0$を代入して、翌月物と翌々月物の BSIV をそれぞれ計算し、(5)式の線形補間により 30 日間の BSIV に直した。

以上のようにして計算された日経 225 の MFIV と BSIV が図 1 に描かれている。両者は似通った動きをしているが、ほとんどの日で BSIV が MFIV を下回っている。また、2007 年 8 月 17 日に両者ともジャンプしているが、これはサブプライム問題の影響である。

図1：MFIVとBSIV



６．今後の発展

本稿で解説した MFIV については、日中リターンの 2 乗和である Realized Volatility（RV）とともに（RV については、渡部・山口［2006］参照）、海外でさまざまな研究が行われている。例えば、Jiang and Tian［2005］は、S&P500 の MFIV を計算し、それが将来のボラティリティの予測に関して、RV や BSIV と比べて追加的な情報を含んでいることを明らかにしている。また、MFIV は、現時点から満期までの原資産価格のボラティリティのフォワード測度の下での期待値なので、Bollerslev et al.［2007］、Bollerslev and Zhou［2007］らは、IV と RV の差をボラティリティのリスク・プレミアムと考えて分析を行っている。多くの研究で、MFIV と RV はいずれも長期記憶過程に従っているという結果得られているので、Bandi and Perron［2006］、Christensen and Nielsen［2006］らは、それらの間の分数共和分（fractional co-integration）関係の分析を行っている。さらに、Bollerslev and Zhou［2006］は、MFIV や RV を用いたリターンとボラティリティの関係の分析を行っている。

本稿では日経 225 株価指数の MFIV を計算するだけに留まったが、今後は、それを用いてさらに研究を進める予定である。

参考文献

[1] Aït-Sahalia, Y. and Lo, A. W. [1998], "Nonparametric Estimation of State-price Densities Implicit in Financial Asset Prices," *Journal of Finance*, 53, 499-547.

[2] Bandi, F. M. and Perron, B. [2006], "Long Memory and the Relation between Implied and Realized Volatility," *Journal of Financial Econometrics*, 4, 636-670.

[3] Bollerslev, T., Gibson, M. and Zhou, H. [2007], "Dynamic Estimation of Volatility Risk Premia and Investor Risk Aversion from Option-Implied and Realized Volatilities," FEDS Working Paper No. 2004-56, Federal Reserve Board.

[4] Bollerslev, T. and Zhou, H. [2006], "Volatility Puzzles: A Simple Framework for Gauging Return-Volatility Regressions," *Journal of Econometrics*, 131, 123-150.

[5] Bollerslev, T. and Zhou, H. [2007], "Expected Stock Returns and Variance

Risk Premia," AFA 2008 New Orleans Meeting Paper.

[6] Campbell, J. Y., Lo, A. W. and Mackinlay, A. C. [1997], *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton: Princeton University Press.（祝迫得夫・大橋和彦・中村信弘・本田俊毅・和田賢治訳『ファイナンスのための計量分析』, 2003, 共立出版.）

[7] CBOE (2003), "The VIX White Paper," *Chicago Board Options Exchange*, URL:http://www.cboe.com/micro/vix/vixwhite.pdf.

[8] Christensen, B. and Nielsen, M. [2006], "Asymptotic Normality of Narrow-band Least Squares in the Stationary Fractional Cointegration Model and Volatility Forecasting," *Journal of Econometrics*, 133, 343--371.

[9] Demeterfi, K., Derman E., Kamal, M. and Zou, J. [1999], "More Than You Ever Wanted to Know About Volatility Swaps," Quantitative Strategies Notes, Goldman Sachs.

[10] Jiang, G. J. and Tian, Y. S. [2005], "Model Free Implied Volatility and Its Information Content ," *Review of Financial Studies*, 18, 1342.

[11] Jiang, G. J. and Tian, Y. S. [2007], "Extracting Model-Free Volatility from Option Prices: An Examination of the VIX index, " *Journal of Derivatives*, Spring, 35-60.

[12] Maghrebi, N. (2007), "An Introduction to the Nikkei 225 Implied Volatility Index," Keizai Riron, *Wakayama Economic Review,* 336, 35-55.

[13] Nakamura, H. and Shiratsuka, S. [1999], "Extracting Market Expectations from Option Prices: Case Studies in Japanese Option Markets," *Monetary and Economic Studies*, Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan, 17, 1-44.

[14] Nishina, K., Maghrebi, N. and Kim, M. [2006], "Stock Market Volatility and the Forecasting Accuracy of Implied Volatility Indices," Discussion Papers in Economics and Business, No. 06-09, Graduate School of Economics and Osaka School of International Public Policy.

[15] Press, H. W., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. and Flannery, B. P. [1993], *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press: Cambridge.（丹慶勝市・奥村晴彦・佐藤俊郎・小林誠訳『ニューメリカルレシピ・イン・シー－C言語による数値計算のレシピ』技術評論社, 1993.）

[16] Shimko, D. [1993], "Bounds of Probability," *Risk*, 6, 33-37.

[17] 渡部敏明・山口圭子 [2006],「日経225の "Realized Volatility" とインプライド・ボラティリティ」『先物オプションレポート』Vol.18, No.12.