解　　説

マルコフ・スイッチングGARCHモデルを用いたオプション価格の分析(第1回)

東洋大学経営学部助教授　里吉清隆
日本大学経済学部助教授　三井秀俊

1. はじめに

本稿は，原資産価格のボラティリティがマルコフ・スイッチングGARCH（Markov Switching-GARCH）モデルに従う場合のヨーロピアン・オプション価格の評価法を解説し，日経225オプション市場の実証分析を行なったものである。第1回では， オプション価格の評価方法についてまとめ，第2回では，日経225オプション価格データを使用した実証分析の結果について述べることにする。

ヨーロピアン・オプションの評価において頻繁に用いられているBlack and Scholes（1973）モデル（以下，BSモデル）では，ボラティリティは時間を通じて満期日まで一定であると仮定している。しかしながら，過去の多くの実証分析の結果からボラティリティは時間を通じて変動していると考えられ，そうした場合にボラティリティの変動をどのように定式化し，オプション価格を評価するかは非常に重要な問題となっている。ボラティリティの変動を表すモデルとしては，ARCH（Autoregressive Conditional Heteroskedasticity）モデルとGARCH（Generalized ARCH）モデルが特に有名である。三井（2000），三井・渡部（2003），渡部（2003）では，このようなARCH型モデルを用いて日経225オプションの実証研究を行なっている。

ARCHモデルを始めとしたボラティリティ変動モデルの文献では，一般に，ボラティリティに対するショックの持続性が非常に高いことが知られている。しかし，このような持続性はボラティリティの構造変化によって引き起こされた可能性が考えられる。このことから，構造変化を捉えるためにARCHモデルにマルコフ過程に従う状態変数を含めたマルコフ・スイッチングARCH（MS-ARCH）モデルが提案された。また，Gray（1996）はARCHモデルではなくGARCHモデルに構造変化を含めたマルコフ・スイッチングGARCH（MS-GARCH）モデルを提案した。GARCH（1, 1)モデルはARCH（∞）モデルに対応していることから，オプション価格の実証分析に用いるボラティリティ変動モデルとしては，MS-ARCHモデルよりもMS-GARCHモデルのほうが適切であると考えられる。

本研究で扱う日経225オプションのようなヨーロピアン・オプションの価格は，投資家の危険中立性を仮定するとモンテカルロ・シミュレーションによって簡単に導出することができる。また，シミュレーションの収束を早める手段としては，負相関法と制御変量法の2つの分散減少法を用いることを提案する。

2. マルコフ・スイッチングGARCHモデル

t 時点の収益率を R_t，ボラティリティを σ_t^2 とすると，マルコフ・スイッチングGARCHモデルは次のように表される。

$$R_t = \mu + \varepsilon_t, \tag{1}$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t,\quad \sigma_t > 0,\quad z_t \sim i.i.d.,\ E\left[z_t\right]=0,\ Var\left[z_t\right]=1, \tag{2}$$

$$\sigma_t^2 = \omega_{s_t} + \alpha_{s_t}\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_{s_t}E\left[\sigma_{t-1}^2 \mid I_{t-2}\right], \tag{3}$$

$$\omega_{s_t} = \omega_0\left(1-s_t\right) + \omega_1 s_t, \tag{4}$$

$$\alpha_{s_t} = \alpha_0\left(1-s_t\right) + \alpha_1 s_t, \tag{5}$$

$$\beta_{s_t} = \beta_0\left(1-s_t\right) + \beta_1 s_t. \tag{6}$$

(1)式の定数項 μ は期待収益率，ε_t は誤差項であり，収益率に自己相関は無いと仮定する。また，本稿では S_t を t 時点の原資産価格として，t 時点の収益率を $R_t = \left(S_t - S_{t-1}\right)/S_{t-1}$ と定義する。(3)式の I_{t-2} は $t-2$ 時点までの情報集合，つまり，$I_{t-2} = \left(R_{t-2}, R_{t-3}, \ldots\right)$ である。(4)式，(5)式，(6)式の s_t はマルコフ過程に従う状態変数であり，その推移確率は

$$\Pr\left[s_t = 1 \mid s_{t-1} = 1\right] = p,\quad \Pr\left[s_t = 0 \mid s_{t-1} = 0\right] = q$$

とする。ただし，$\Pr\left[s_t = j \mid s_{t-1} = i\right]$ は状態 i から状態 j に推移する確率である。$s_t = 0$ のときのボラティリティを σ_{0t}^2，$s_t = 1$ のときのボラティリティを σ_{1t}^2 とすると，ボラティリティ σ_t^2 はそれぞれ $\sigma_{0t}^2 = \omega_0 + \alpha_0\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_0 E\left[\sigma_{t-1}^2 \mid I_{t-2}\right]$，$\sigma_{1t}^2 = \omega_1 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 E\left[\sigma_{t-1}^2 \mid I_{t-2}\right]$ となる。(3)式の条件付き期待値 $E\left[\sigma_{t-1}^2 \mid I_{t-2}\right]$ は，$E\left[\sigma_{t-1}^2 \mid I_{t-2}\right] = \sigma_{0,t-1}^2 \Pr\left[s_{t-1} = 0 \mid I_{t-2}\right] + \sigma_{1,t-1}^2 \Pr\left[s_{t-1} = 1 \mid I_{t-2}\right]$ である。

誤差項が正規分布に従う場合，(2)式における z_t は，

$$z_t \sim i.i.d.N(0,1) \tag{7}$$

となる。また，t 分布に従う場合には，

$$z_t \sim i.i.d.t(0,1,\nu). \tag{8}$$

となる。ただし，ν は自由度であり，z_t の分散は1に基準化されている。このマルコフ・スイッチングGARCHモデルのパラメータは，最尤法によって推定することができる。

3．モンテカルロ・シミュレーションによるオプション価格の評価法

3.1. 危険中立性の下でのオプション価格

投資家が危険中立的な場合，ヨーロピアン・オプションの価格は，満期におけるオプション価格の期待値を安全資産の金利 r で割り引いた割引現在価値となる。すなわち，$T+\tau$ 時点が満期で権利行使価格 K のコール・オプションの T 時点の価格を C_T，プット・オプションの価格を P_T とすると，

$$C_T = (1+r)^{-\tau} E\left[Max(S_{T+\tau}-K,0)\right], \tag{9}$$

$$P_T = (1+r)^{-\tau} E\left[Max(K-S_{T+\tau},0)\right] \tag{10}$$

と表される。ここで，$S_{T+\tau}$ はオプションの満期の原資産価格である。MS-GARCHモデルの場合，右辺の期待値を解析的に求めることができないので，モンテカルロ・シミュレーションによって評価する。シミュレーションを n 回行ない，n 個の満期の原資産価格 $S_{T+\tau}$ が得られたとして，これらを $\left(S_{T+\tau}^{(1)}, S_{T+\tau}^{(2)}, \ldots, S_{T+\tau}^{(n)}\right)$ する。ただし，$S_{T+\tau}^{(i)}$ は i 回目のパスの発生によって得られた満期の原資産価格である。n が十分に大きいとき，大数の法則より(9)，(10)式の期待値はそれぞれ以下の式によって評価できる。

$$E\left[Max(S_{T+\tau}-K,0)\right] \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Max\left(S_{T+\tau}^{(i)}-K,0\right), \tag{11}$$

$$E\left[Max(K-S_{T+\tau},0)\right] \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Max\left(K-S_{T+\tau}^{(i)},0\right). \tag{12}$$

3.2. シミュレーションの手順

本稿のモデルにおけるオプション価格の計算手順は以下の通りである。ただし，ここでの説明ではMS-GARCHモデルの誤差項は正規分布に従うとする。

[1] 標本 $\{R_1, R_2, \ldots, R_T\}$ を使って，MS-GARCHモデルの未知パラメータを最尤推定する。

[2] 互いに独立な標準正規分布から $\left\{z_{T+1}^{(i)}, z_{T+2}^{(i)}, \ldots, z_{T+\tau}^{(i)}\right\}_{i=1}^{n}$ をサンプリングする。

[3] 互いに独立な標準一様分布から $\left\{u_{T+1}^{(i)}, u_{T+2}^{(i)}, \ldots, u_{T+\tau}^{(i)}\right\}_{i=1}^{n}$ をサンプリングする。

[4] 手順[3]の一様乱数と最尤法で推定された推移確率 p，q を使って，マルコフ過程に従う状態変数 $\left\{s_{T+1}^{(i)}, s_{T+2}^{(i)}, \ldots, s_{T+\tau}^{(i)}\right\}_{i=1}^{n}$ を求める。

[5] 手順[2]，[4]の値をMS-GARCHモデルに代入して，$\left\{R_{T+1}^{(i)}, R_{T+2}^{(i)}, \ldots, R_{T+\tau}^{(i)}\right\}_{i=1}^{n}$ を計算する。

[6] 次の式を使ってオプションの満期 $T+\tau$ 時点における原資産価格 $\left(S_{T+\tau}^{(1)}, S_{T+\tau}^{(2)}, \ldots, S_{T+\tau}^{(n)}\right)$ を求める。

$$S_{T+\tau}^{(i)} = S_T \prod_{s=1}^{\tau}\left(1+R_{T+s}^{(i)}\right), \quad i=1,2,\ldots,n. \tag{13}$$

[7] 次の式からコール・オプションの価格 C_T，プット・オプションの価格 P_T をそれぞれ計算する。

$$C_T \approx (1+r)^{-\tau}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Max\left(S_{T+\tau}^{(i)}-K,0\right), \tag{14}$$

$$P_T \approx (1+r)^{-\tau}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Max\left(K-S_{T+\tau}^{(i)},0\right). \tag{15}$$

シミュレーションの回数は $n=10{,}000$ 程度で十分であると考えられる。計算される C_T，P_T の分散を小さくするために，本稿では代表的な分散減少法である制御変量法と負相関法を併せて用いることを提案する。

ところで，手順[4]では一様乱数と推移確率を用いてマルコフ過程に従う状態変数を求めていくのだが，出発点である $T+1$ 時点の状態変数 s_{T+1} に関してはこの方法が適用できない。なぜならば，手順[1]においてパラメータの最尤推定を行なってもオプションの評価時点である T 時点の状態変数 s_T の値は依然として未知であり，既知でなければ一様乱数と推移確率から状態変数 s_{T+1} を求めることはできないからである。したがって，s_{T+1} についてはハミルトン・フィルタで得られた T 時点の確率 $\Pr\left[s_T=i \mid I_T\right]$ と推移確率 $\Pr\left[s_{T+1}=j \mid s_T=i\right]$ を使って

$$\Pr\left[s_{T+1}=j \mid I_T\right] = \sum_{i=0}^{1}\Pr\left[s_{T+1}=j \mid s_T=i\right]\Pr\left[s_T=i \mid I_T\right]$$

を計算し，この確率からサンプリングを行なうことにする。

3.3. 分散減少法

本稿ではシミュレーションの値の分散を減らし，より精度の高い推定値を得るために負相関法と制御変量法の

２つの分散減少法を用いることを提案する。

負相関法とは，乱数を発生させるときになるべく互いに負の相関を持つ系列を２つ生成し，それらの平均値を取ることによってサンプリングの誤差を減らす手法である。本稿のモデルでは，手順[2]において標準正規分布から $\left\{z_{T+1}^{(i)},z_{T+2}^{(i)},\ldots,z_{T+\tau}^{(i)}\right\}_{i=1}^{n}$ がサンプリングされたとすると，それにマイナスをつけた値 $\left\{-z_{T+1}^{(i)},-z_{T+2}^{(i)},\ldots,-z_{T+\tau}^{(i)}\right\}_{i=1}^{n}$ を作成して乱数に加える。手順[3]でも同様に，標準一様分布から $\left\{u_{T+1}^{(i)},u_{T+2}^{(i)},\ldots,u_{T+\tau}^{(i)}\right\}_{i=1}^{n}$ をサンプリングしたら，１から一様乱数を引いた値 $\left\{1-u_{T+1}^{(i)},1-u_{T+2}^{(i)},\ldots,1-u_{T+\tau}^{(i)}\right\}_{i=1}^{n}$ を追加する。したがって，手順[4]以降のシミュレーションの回数は $2n$ となる。このような２種類の乱数系列を用いて計算される満期の原資産価格，すなわち $\left\{S_{T+\tau}^{(i)}\right\}_{i=1}^{n}$ と $\left\{S_{T+\tau}^{(i)}\right\}_{i=n+1}^{2n}$ の間には高い負の相関が生じるので, それによって計算されるオプション価格の分散を小さくすることができる。

もう一つの分散減少法である制御変量法とは，解析的に計算できる変量を制御変量として，制御変量を解析的に計算した値とシミュレーションによって計算した値の両方を使って分散を小さくする方法である。制御変量法の制御変量としてはBSモデルのオプション価格を用いることにする。BSモデルでは，原資産価格 S は次の幾何ブラウン運動に従うと仮定している。

$$dS=\mu Sdt+\sigma SdW.$$

ただし，μ は期待収益率，dt は無限小の時間間隔，σ は標準偏差，dW は標準ウィナー過程の無限小増分である。このとき，伊藤の公式から原資産価格の自然対数 $\ln S$ は

$$d\ln S=\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)dt+\sigma dW$$

となり，$\ln S$ は算術ブラウン運動に従う。ここで，オプション価格の評価時点である T 時点の原資産価格を S_T，満期の $T+\tau$ 時点の原資産価格を $S_{T+\tau}$ とすると，それぞれの自然対数の差である $\ln S_{T+\tau}-\ln S_T$ は次のような正規分布に従う。

$$\ln S_{T+\tau}-\ln S_T \sim N\left(\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau,\sigma^2\tau\right).$$

本稿では投資家の危険中立性を仮定しているので，μ は連続複利方式の安全資産の金利 r' に等しくなる。したがって，連続複利における t 時点の収益率 $R_t=\ln S_t-\ln S_{t-1}$ は，

$$\begin{aligned}&R_t=r'-\frac{1}{2}\sigma^2+\varepsilon_t,\\&\varepsilon_t=\sigma z_t,\quad z_t\sim i.i.d.N(0,1)\end{aligned}\tag{16}$$

と定式化することができる。また，$\ln S_{T+\tau}-\ln S_T$ は以下のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned}&\ln S_{T+\tau}-\ln S_T\\&\quad=\left(\ln S_{T+\tau}-\ln S_{T+\tau-1}\right)+\left(\ln S_{T+\tau-1}-\ln S_{T+\tau-2}\right)+\cdots+\left(\ln S_{T+1}-\ln S_T\right)\\&\quad=R_{T+\tau}+R_{T+\tau-1}+\cdots+R_{T+1}.\end{aligned}\tag{17}$$

したがって，i 回目のパスの発生によって得られた満期の原資産価格 $S_{T+\tau}^{(i)}$ は(16)式，(17)式より次式のように表現できる。

$$\begin{aligned}S_{T+\tau}^{(i)}&=S_T\exp\left(R_{T+\tau}^{(i)}+R_{T+\tau-1}^{(i)}+\cdots+R_{T+1}^{(i)}\right)\\&=S_T\exp\left\{\left(r'-\frac{1}{2}\sigma^2+\varepsilon_{T+\tau}^{(i)}\right)+\left(r'-\frac{1}{2}\sigma^2+\varepsilon_{T+\tau-1}^{(i)}\right)+\cdots+\left(r'-\frac{1}{2}\sigma^2+\varepsilon_{T+1}^{(i)}\right)\right\}\\&=S_T\exp\left(r'\tau-\frac{1}{2}\sigma^2\tau+\sigma\sum_{t=T+1}^{T+\tau}z_t^{(i)}\right),\quad i=1,2,\ldots,n.\end{aligned}\tag{18}$$

よって，BSモデルからシミュレーションによって満期の原資産価格を求めるにはこの式を用いることになる。シミュレーションを行なうと同時に，BS公式からオプション価格の解析解も計算する。MS-GARCHモデルからシミュレーションで計算された満期 $T+\tau$ 時点における原資産価格を $S_{MS-GARCH}^{(i)}$，BSモデルからシミュレーションで計算された満期における原資産価格を $S_{BS}^{(i)}$ とする。さらに，それぞれのモデルで計算された T 時点のコール・オプション価格を $\tilde{C}_{MS-GARCH}$，$\tilde{C}_{BS}$ とする。また，BS公式による解析解を C_{BS} とする。これらを使って，コール・オプション価格を次のように計算する。

$$C_T=\tilde{C}_{MS-GARCH}-\varphi\left(\tilde{C}_{BS}-C_{BS}\right).\tag{19}$$

上式の両辺の期待値をとると，

$$\begin{aligned}E\left[C_T\right]&=E\left[\tilde{C}_{MS-GARCH}-\varphi\left(\tilde{C}_{BS}-C_{BS}\right)\right]\\&=E\left[\tilde{C}_{MS-GARCH}\right]-\varphi\left(C_{BS}-C_{BS}\right)\\&=E\left[\tilde{C}_{MS-GARCH}\right]\end{aligned}$$

となり, 左辺のシミュレーションで得られる C_T の期待値は，MS-GARCHモデルからシミュレーションで計算される $\tilde{C}_{MS-GARCH}$ の期待値と等しいことが分かる。また，(19)式より，C_T の分散は次のように表される。

$$Var\left[C_T\right]=Var\left[\tilde{C}_{MS-GARCH}\right]+\varphi^2Var\left[\tilde{C}_{BS}\right]-2\varphi Cov\left[\tilde{C}_{MS-GARCH},\tilde{C}_{BS}\right].$$

この分散を最小化する φ は，上式を φ で偏微分してゼロ

とおきφに関して解いた$\varphi = Cov\left[\tilde{C}_{MS-GARCH}, \tilde{C}_{BS}\right] \Big/ Var\left[\tilde{C}_{BS}\right]$となる。プット・オプションの計算も同様に行なう。

MS-GARCHモデルの誤差項が(8)式のようにt分布に従う場合には，手順[2]において標準正規分布からではなく，自由度ν，分散１に基準化されたt分布から$\left\{z_{T+1}^{(i)}, z_{T+2}^{(i)}, \ldots, z_{T+\tau}^{(i)}\right\}_{i=1}^{n}$をサンプリングすることになる。このサンプリングを行なうには，まず，互いに独立な標準正規分布と自由度νのχ^2分布からそれぞれ$x_t^{(i)}$と$w_t^{(i)}$をサンプリングして，$z_t^{(i)} = \sqrt{\nu - 2}x_t^{(i)} \Big/ \sqrt{w_t^{(i)}}$と計算すればよい。この場合，制御変量法でBSモデルのオプション価格をシミュレーションで求める際には，(18)式の$z_t^{(i)}$の代わりに$x_t^{(i)}$を使って計算することになる。

４．まとめ

本稿では，原資産価格のボラティリティがMS-GARCHモデルに従う場合の，シミュレーションによるオプション価格の評価法の解説を行なった。第２回では，日経225オプション・データを用いた実証分析の結果について述べることにする。

参考文献

[1] Black, F. and M. Scholes (1973), “The Pricing of Options and Corporate Liabilities,” *Journal of Political Economy*, 81, pp.637-659.

[2] Gray, S. F. (1996), “Modeling the Conditional Distribution of Interest Rates as a Regime-Switching Process,” *Journal of Financial Economics*, 42, pp.27-62.

[3] 三井秀俊（2000），「日経225オプション価格のGARCHモデルによる分析」，MPTフォーラム・日本ファイナンス学会『現代ファイナンス』No. 7，pp. 57−73.

[4] 三井秀俊・渡部敏明（2003），「ベイズ推定法によるGARCHオプション価格付けモデルの分析」，日本統計学会『日本統計学会誌』第33巻，第３号，pp. 307−324.

[5] 渡部敏明（2003），「日経225オプションデータを使ったGARCHオプション価格付けモデルの検証」，日本銀行金融研究所『金融研究』第22巻，別冊第２号，pp. 1−34.

１．ＲＮプライム指数構成銘柄の一部変更

Russell/Nomura Primeインデックス（ＲＮプライム指数）構成銘柄について，以下のとおり除外することについての発表がありましたので，お知らせいたします。

除外銘柄（コード）	実施日
すかいらーく（8180）	平成18年８月23日（水）
ヨークベニマル（8188）	平成18年９月１日（金）
SMBCフレンド証券（8623）	

２．日経平均株価及び日経株価指数300構成銘柄の一部入替え

（株）日本経済新聞社より，日経平均株価及び日経株価指数300構成銘柄について，定期見直しに伴い，以下のとおり銘柄の一部入替えを行う旨の発表がありましたので，お知らせします。

１．日経平均株価

除外銘柄	コード	採用銘柄	コード	実施日
日本製粉	2001	東急不動産	8815	平成18年10月２日（月）
東映	9605	東宝	9602	

２．日経株価指数300

除外銘柄	コード	採用銘柄	コード	実施日
日鉄鉱業	1515	ヤフー	4689	平成18年10月２日（月）
共同印刷	7914	日東電工	6988	
応用地質	9755	レオパレス２１	8848	