解　　説

マルコフ・スイッチングGARCHモデルを用いたオプション価格の分析(第２回)

東洋大学経営学部助教授　里吉清隆
日本大学経済学部助教授　三井秀俊

１．はじめに

本稿の第１回では，マルコフ・スイッチングGARCH (Markov Switching-GARCH) モデルによるヨーロピアン・オプション価格の評価法について説明した。今回は日経225オプション市場の価格データを用いて実証分析を行い，その結果を述べることにする[1]。

２．本研究で比較するモデル

本研究では，前回説明したMS-GARCHモデルだけでなく，以下のような従来のGARCHモデルとマルコフ・スイッチング (Markov Switching; MS) モデルも併せて分析を行なう。GARCHモデルは,

$$R_t = \mu + \varepsilon_t,$$
$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t,\quad \sigma_t > 0,\quad z_t \sim i.i.d.,\ E[z_t] = 0,\ Var[z_t] = 1,$$
$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 \tag{20}$$

である。一方，MSモデルは,

$$R_t = \mu + \varepsilon_t,$$
$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t,\quad \sigma_t > 0,\quad z_t \sim i.i.d.,\ E[z_t] = 0,\ Var[z_t] = 1,$$
$$\sigma_t^2 = \omega_0(1 - s_t) + \omega_1 s_t \tag{21}$$

と定式化される。このモデルでは，ボラティリティ σ_t^2 は ω_0， ω_1 のどちらかの状態になる。

ところで，投資家は危険中立的であると仮定しているので，安全資産利子率を r とすると，(1)式の原資産価格収益率 R_t の式は,

$$R_t = r + \varepsilon_t \tag{22}$$

となる。つまり，全てのモデルにおいて収益率は(22)式で表される。

本研究では，以下のボラティリティが変動する６種類のモデルとBSモデルをオプションの価格付けに適用し，モデルの比較を行なう。“-n”は誤差項が正規分布に従うことを表し，“-t”は誤差項が t 分布に従うことを表す。

(1) MS-GARCH-n モデル … (2)－(7), (22)式.
(2) MS-GARCH-t モデル … (2)－(6), (8), (22)式.
(3) GARCH-n モデル … (2), (7), (20), (22)式.
(4) GARCH-t モデル … (2), (8), (20), (22)式.
(5) MS-n モデル … (2), (7), (21), (22)式.
(6) MS-t モデル … (2), (8), (21), (22)式.
(7) BS モデル … Black and Scholes モデル.

３．データとモデルの推定結果

本研究の実証分析に用いたオプションは，2000年５月限月から2006年３月限月までの日経225コール･オプション（標本数707），ならびにプット・オプション（標本数782）である。これらのオプションの満期から営業日ベースで20日前（τ=20）の終値を分析対象とした[2]。安全資産利子率 r のデータには，無担保コール翌日物を用いた[3]。また，基本的な仮定として，取引費用，税金，配当は存在せず，オプションの証拠金は不要とした。MS-GARCHモデルやGARCHモデルなどのパラメータの推定には, 満期の20日前から更に2, 500日前までの日経225株価指数の終値を使用した[4]。例えば，最初の限月である2000年５月限月の場合，オプションの評価日は満期から20日前の2000年４月11日, その2, 500日前は1990年２月21日となるので, 日次収益率を計算することにより, 標本期間は1990年２月22日から2000年４月11日までとなる（標本の大きさはT=2, 500)。この期間の日次収益率を用いてモデルのパラメータの推定を行ない，その推定されたパラメータを所与として，シミュレーションによってオプション価格を求める。シミュレーションの回数は10万回とした (n =100, 000)。次の限月以降も同様にして計算を行なうので，各限月に対応して71の異なる標本期間ができる。最後の限月の2006年３月限月の場合，満期から20日前は2006年２月10日である。したがって，本研究で用いた日経225株価指数の日次収益率の全標本期間は, 1990年２月22日から2006年２月10日までとなる。

表１には日経225株価指数の日次収益率の基本統計量を示してある。尖度（kurtosis）の値は6. 4801であり，正規分布の３を大幅に上回っていることから，日次収益率は正規分布よりも裾の厚い分布に従っていることが分かる。このような裾の厚さは，ボラティリティの時系列的変動によって引き起こされている可能性がある。表の最後の列の LB^2 (12)は，日次収益率を２乗したときの自己相関が１次から12次まで全てゼロであるという帰無仮説

[1] 本稿で使用した日経225オプションのデータは，大阪証券取引所から提供して頂いた。

[2] 日経225オプション終値と日経225株価指数終値とが異時点で値付けされている可能性があるが, 本研究では考慮しなかった。

[3] 無担保コール翌日物のデータは，日経NEEDS-FinancialQUESTを利用した。

[4] 日経225株価指数（日経平均）のデータは, 日経NEEDS-Financial QUESTを利用した．また，パラメータの推定には，プログラミング言語であるOx Console 4. 04（http://www.doornik.com/ox/）を利用した。

を検定するためのLjung=Box統計量である[5]。この統計量は，帰無仮説が正しければ漸近的に自由度12のカイ２乗分布に従う。ここでの LB^2 (12)の値は231.0423であり，非常に大きい。自由度12のカイ２乗分布の１%有意水準における臨界値は26.22であることから，日次収益率には非線形な自己相関が有意に存在していると考えられる。これらの結果より，日経225株価指数の時系列的変動を捉えるためには，本研究のように何らかのボラティリティ変動モデルを用いる必要があることが分かる。

表１　日経225株価指数終値の収益率 R_t の基本統計量

標本期間：1990.2.22－2006.2.10

標本数	平均	標準偏差	歪度	尖度	最大値	最小値	LB^2 (12)
3935	-0.0001	0.0149	0.2898	6.4801	0.1324	-0.0698	231.0423
	(0.0002)		(0.0390)	(0.0781)			

表２から**表７**には，各限月に対応した71の異なる標本期間における各々のモデルのパラメータの平均値・最小値・最大値を示した。**表２**のMS-GARCH-nモデルの結果を見ると，推移確率の平均値はそれぞれ p =0.925，q =0.963であり，非常に高くなっている。このことは，一度スイッチングを起こすとそのままの状態が長く継続することを表している。このモデルのGARCH部分におけるボラティリティに対するショックの持続性は，それぞれの状態において $\alpha_0+\beta_0$ =0.453，$\alpha_1+\beta_1$ =0.831となっていて，持続性の値に違いがあることが分かる。このような持続性の違いは**表３**のMS-GARCH-tモデルの結果にも表れている。しかし，誤差項をｔ分布にしたときのほうが正規分布の場合と比べてどちらの状態においても平均的には持続性が高くなっている。

表２　MS-GARCH-nモデルの推定結果

	p	q	ω_0	ω_1	α_0	α_1
平均値	0.925	0.963	0.439	1.464	0.001	0.019
最小値	0.514	0.822	0.000	0.000	0.000	0.000
最大値	0.979	0.984	0.634	2.526	0.014	0.078

	p	q	ω_0	ω_1	α_0	α_1
平均値	0.925	0.963	0.439	1.464	0.001	0.019
最小値	0.514	0.822	0.000	0.000	0.000	0.000
最大値	0.979	0.984	0.634	2.526	0.014	0.078

	β_0	β_1	$\alpha_0+\beta_0$	$\alpha_1+\beta_1$	対数尤度
平均値	0.452	0.811	0.453	0.831	-4352.381
最小値	0.321	0.527	0.321	0.579	-4407.960
最大値	0.674	2.048	0.674	2.048	-4264.429

表３　MS-GARCH-tモデルの推定結果

	p	q	ω_0	ω_1	α_0	α_1
平均値	0.994	0.991	0.206	0.333	0.013	0.065
最小値	0.986	0.985	0.012	0.089	0.000	0.046
最大値	1.000	1.000	0.696	0.735	0.066	0.097

	β_0	β_1	ν	$\alpha_0+\beta_0$	$\alpha_1+\beta_1$	対数尤度
平均値	0.605	0.872	8.145	0.618	0.937	-4321.839
最小値	0.103	0.790	6.930	0.103	0.875	-4382.226
最大値	0.904	0.902	9.929	0.970	0.965	-4249.719

表４のGARCH-nモデル，**表５**のGARCH-tモデルの結果を見ると，ボラティリティの持続性はそれぞれ $\alpha+\beta$ =0.975，$\alpha+\beta$ =0.987であり，非常に１に近い。このような高い持続性は多くの先行研究で見られる結果と同じである[6]。MS-GARCHモデルの結果と比べると，誤差項の従う分布が正規分布，またはｔ分布のどちらであっても，ボラティリティの持続性の値はGARCHモデルよりもMS-GARCHモデルほうが低くなっている。このことから，マルコフ・スイッチングに従う状態変数をGARCHモデルに含めることによって，GARCHモデルで説明されるボラティリティの持続性は減少することが分かる。

また，各モデルの対数尤度の平均値を比較すると，最も高いのがMS-GARCH-tモデルの-4321.839，次がGARCH-tモデルの-4328.645となっている。この２つのモデルのうち，どちらのモデルが正しいかを判断するには，スイッチングが起きているか否かを調べる検定を行なわなければならない。しかしながら，一般的に知られているように，マルコフ・スイッチングが無いという帰無仮設のもとではモデルのいくつかのパラメータは識別することができず，検定統計量は通常の漸近分布に従わないため，尤度比検定は困難になる。本研究の目的はオプション価格の評価であるので，このような検定は行なわないことにした。

表４　GARCH-nモデルの推定結果

	ω	α	β	$\alpha+\beta$	対数尤度
平均値	0.059	0.083	0.892	0.975	-4375.967
最小値	0.032	0.072	0.869	0.966	-4425.958
最大値	0.077	0.103	0.909	0.987	-4294.630

表５　GARCH-tモデルの推定結果

	ω	α	β	ν	$\alpha+\beta$	対数尤度
平均値	0.033	0.071	0.916	7.722	0.987	-4328.645
最小値	0.021	0.062	0.892	6.483	0.978	-4387.870
最大値	0.049	0.092	0.927	9.809	0.991	-4255.932

[5] ただし，ここでのLjung=Box統計量は，Diebold (1988) によって分散不均一性を調整したものである。

[6] 例えば，三井・渡部 (2003)，渡部 (2003) を参照のこと。

表６　MS-nモデルの推定結果

	p	q	ω_0	ω_1	対数尤度
平均値	0.962	0.983	1.191	4.408	−4366.123
最小値	0.947	0.980	1.110	3.983	−4421.448
最大値	0.970	0.987	1.291	5.249	−4294.827

表７　MS-tモデルの推定結果

	p	q	ω_0	ω_1	ν	対数尤度
平均値	0.976	0.988	1.226	4.076	10.322	-4352.254
最小値	0.968	0.985	0.980	3.051	7.802	-4410.443
最大値	0.990	0.990	1.340	4.976	14.889	-4279.640

４．日経225オプションの実証結果

MS-GARCH-n，MS-GARCH-t，GARCH-n，GARCH-t，MS-n，MS-t，BSモデルの７種類のモデルによるオプション価格の推定値と実際の市場価格を用いて，以下のように平均誤差率（mean error rate; MER）と平均２乗誤差率（root mean squared error rate; RMSER）を計算し，各モデルの比較・検討を行なう。

$$MER = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\hat{X}_i^{推定値} - X_i^{市場価格}}{X_i^{市場価格}}\right),$$

$$RMSER = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\hat{X}_i^{推定値} - X_i^{市場価格}}{X_i^{市場価格}}\right)^2}, \quad X = C, P.$$

ここで，$\hat{X}_i^{推定値}$ はモンテカルロ・シミュレーションによるオプションの推定値，あるいは，BSモデルの理論価格を表し，$X_i^{市場価格}$ はオプションの市場価格を表す。m は標本数である。C はコール・オプション，P はプット・オプションを表している。また，マネネス（moneyness）は，**表８**のように５種類のカテゴリーに分類した。

表８　マネネスによるオプションの分類

マネネス	コール	プット
$S/K < 0.91$	deep-out-of-the-money (DOTM)	DITM
$0.91 \le S/K < 0.97$	out-of-the-money (OTM)	ITM
$0.97 \le S/K \le 1.03$	at-the-money (ATM)	ATM
$1.03 < S/K \le 1.09$	in-the-money (ITM)	OTM
$1.09 < S/K$	deep-in-the-money (DITM)	DOTM

コール・オプションのMERとRMSERの計算結果は**表９**にまとめた。マネネスの各カテゴリーの標本数は，DOTMで216，OTMで114，ATMで98，ITMで93，DITMで186となっている。MERのTotalの行を見ると，MS-GARCH-tモデルの0.059が最もゼロに近い値を示し，他のモデルに比べて上方または下方バイアスが最も小さいことが分かる。一方，RMSERでは，DITMにおいてBSモデルの値が0.073と最も小さくなっているが，最も大きい値がMS-nモデルの0.075であり，モデルによる差はほとんど無い。また，DITM以外の全てのマネネスでは，MS-GARCH-tモデルの値が最も小さくなっている。Totalにおいても0.588と一番小さい。これらの結果から，MS-GARCH-tモデルは他のモデルに比べて実際のコールの価格に最も近い推定値を求めていることが分かる。

表９　コール・オプションの推定値の比較

MER

	MS-GARCH		GARCH		MS		BS	m
	n	t	n	t	n	t		
DOTM	0.329	0.195	0.121	0.393	0.497	0.500	−0.217	216
OTM	0.328	0.047	0.211	0.154	0.491	0.497	−0.098	114
ATM	0.024	−0.040	0.010	−0.015	0.059	0.066	−0.088	98
ITM	−0.007	−0.014	−0.012	−0.013	−0.005	−0.002	−0.021	93
DITM	−0.004	−0.003	−0.004	−0.003	−0.004	−0.003	−0.002	186
Total	0.155	0.059	0.070	0.140	0.238	0.241	−0.098	707

RMSER

	MS-GARCH		GARCH		MS		BS	m
	n	t	n	t	n	t		
DOTM	1.319	1.014	1.093	1.269	1.858	1.733	1.302	216
OTM	0.986	0.406	0.722	0.599	1.492	1.403	0.633	114
ATM	0.258	0.141	0.216	0.188	0.346	0.333	0.234	98
ITM	0.080	0.068	0.076	0.072	0.084	0.080	0.083	93
DITM	0.074	0.074	0.074	0.074	0.075	0.074	0.073	186
Total	0.837	0.588	0.677	0.746	1.197	1.119	0.770	707

表10はプット・オプションの計算結果である。マネネスの各カテゴリーの標本数は，DOTMで247，OTMで96，ATMで98，ITMで99，DITMで242となっている。MERのTotalでは，MS-tモデルを用いたときオプション価格のバイアスが−0.167と最も小さくなっている。コール・オプションで最もパフォーマンスの良かったMS-GARCH-tモデルの値を見ると，BSモデルよりはゼロに近い値をとっているが，他のモデルに比べて下方バイアスが大きい。RMSERの基準では，GARCH-tモデルの値が0.407と最も小さく，MS-GARCH-tモデルは２番目に小さい値をとっている。以上の結果から，プット・オプションにおいては，本研究で提案したMS-GARCHモデルを用いてもパフォーマンスは改善されないことが分かる。

表10　プット・オプションの推定値の比較

MER

	MS-GARCH		GARCH		MS		BS	m
	n	t	n	t	n	t		
DOTM	-0.614	-0.660	-0.695	-0.605	-0.558	-0.556	-0.828	247
OTM	-0.059	-0.216	-0.124	-0.162	0.022	0.036	-0.344	96
ATM	-0.015	-0.059	-0.023	-0.043	0.015	0.028	-0.095	98
ITM	-0.003	-0.003	-0.004	-0.003	-0.001	0.005	-0.002	99
DITM	-0.001	0.000	-0.001	0.000	-0.001	0.000	0.002	242
Total	-0.204	-0.243	-0.238	-0.216	-0.172	-0.167	-0.315	782

RMSER

	MS-GARCH		GARCH		MS		BS	m
	n	t	n	t	n	t		
DOTM	0.719	0.725	0.749	0.685	0.740	0.727	0.876	247
OTM	0.413	0.336	0.330	0.308	0.596	0.563	0.512	96
ATM	0.219	0.155	0.188	0.173	0.285	0.277	0.237	98
ITM	0.092	0.088	0.087	0.088	0.093	0.094	0.101	99
DITM	0.070	0.071	0.072	0.072	0.070	0.070	0.072	242
Total	0.439	0.431	0.444	0.407	0.479	0.467	0.533	782

５．結論

本研究では，Gray（1996）のMS-GARCHモデルを用いて日経225オプション価格を推定し，オプション市場におけるMS-GARCHモデルの有効性の検証を行なった。本研究で得られた結果は次の通りである。

(1) コール・オプションでは，MERとRMSERのどちらの基準においてもMS-GARCH-tモデルのパフォーマンスが最も優れていた。つまり，オプション市場で基準（bench mark）とされているBSモデルや従来のGARCHモデル，また単なるマルコフ・スイッチング・モデルよりも，マルコフ過程に従う状態変数をGARCHモデルの式に含め，さらに誤差項に t 分布を仮定したマルコフ・スイッチングGARCHモデルのほうが適正に価格付けされることが明らかとなった。

(2) プット・オプションでは，MERではMS-tモデル，RMSERではGARCH-tモデルのパフォーマンスが最も優れていた。つまり，コール・オプションの結果とは異なり，MS-GARCHモデルを用いてもパフォーマンスは改善されなかった。

参考文献

[1] Diebold, F. X. (1988), *Empirical Modeling of Exchange Rate Dynamics*, Springer-Verlag.

[2] Gray, S. F. (1996), “Modeling the Conditional Distribution of Interest Rates as a Regime-Switching Process,” *Journal of Financial Economics*, 42, pp.27-62.

[3] 三井秀俊・渡部敏明（2003),「ベイズ推定法によるGARCHオプション価格付けモデルの分析」，日本統計学会『日本統計学会誌』第33巻，第３号, pp.307-324.

[4] 渡部敏明（2003),「日経225オプションデータを使ったGARCHオプション価格付けモデルの検証」，日本銀行金融研究所『金融研究』第22巻，別冊第２号, pp.1-34.

１．ＲＮプライム指数構成銘柄の一部変更

Russell/Nomura Primeインデックス（RNプライム指数）構成銘柄について，以下のとおり入替えを実施することについての発表がありましたので，お知らせいたします。つきましては，RNプライム指数先物を取引される際には，十分に御注意いただきますようお願い申し上げます。

除　外　銘　柄	コ　ー　ド	実　施　日
もみじホールディングス	8329	平成18年10月２日（月）
山口銀行	8380	
日新火災海上保険	8757	
阪神電気鉄道	9043	
インテック	9738	

採　用　銘　柄	コ　ー　ド	実　施　日
インテックホールディングス	3819	平成18年10月２日（月）
山口フィナンシャルグループ	8418	