

解 説

「日経225の“Realized Volatility”と インプライド・ボラティリティ」

一橋大学経済研究所教授 渡部敏明*
一橋大学大学院経済学研究科博士課程 山口圭子

1. はじめに

近年、欧米を中心に、資産価格のボラティリティの精度の高い推定量として“Realized Volatility”（以下、 RV と略す）が注目を集めている。これは日中の例えば5分ごとのリターンの2乗を足し合わせたもので、本先物オプションレポートでも2004年12月号と2005年5月号で RV とそれを用いた研究を紹介した。

その一方で、ボラティリティにはオプション価格から計算されるインプライド・ボラティリティ（以下、 IV と略す）がある。そこで、本稿では、日経225オプション価格から IV を計算し、その原資産である日経225の5分ごとのリターンから計算した RV と簡単な比較を行った。

2. RV とその計算方法

第 t 日の日中の n 個のリターンデータ $\{r_t, r_{t+1/n}, \dots, r_{t+(n-1)/n}\}$ が与えられたとき、それらをすべて2乗して足し合わせた

$$RV_t = \sum_{i=0}^{n-1} r_{t+i/n}^2 \quad (1)$$

を第 t 日のRealized Volatility (RV) という。

ここで、 $W(s)$ をウィナー過程とし、資産価格の対数値 $\log P(s)$ が伊藤過程

$$d \log P(s) = \mu(s)ds + \sigma(s)dW(s) \quad (2)$$

に従っているものとする、第 t 日の真のボラティリティは、

$$\sigma_t^2 = \int_t^{t+1} \sigma^2(s)ds \quad (3)$$

と定義される。

(1)式で定義される RV_t は、 $n \rightarrow \infty$ とすると、(3)式の σ_t^2 に確率収束するので、 n が十分大きいなら、 RV_t は真のボラティリティ σ_t^2 の精度の高い推定量となる。

ただし、 n を大きくすると RV に含まれる市場のマイクロ構造に起因するノイズが大きくなることが知られている。そこで、 RV の計算には、ティックデータ（値がつくたびのデータ）ではなく、5分ごとの価格を使うことが多い。そこで、本稿でも、5分ごとの価格を用いて RV の計算を行った。

また、第 t 日のボラティリティを $t-1$ 日の終値から t 日の終値までのボラティリティと定義すると、 $t-1$ 日の終値から t 日の始値までの間も考慮に入れなければならないが、その間には取引がないので、5分ごとのリターンを計算することができない。日本の株式市場では昼休みがあるので、その間も同様である。こうした夜間や昼休みのリターンは時間間隔が長いので、それらをそのまま2乗して加えるのは望ましくない。しかし、それらを無視すると、ボラティリティを過小評価してしまう。そこで、Hansen and Lunde (2005)は、夜間や昼休みのリターンの2乗を除いて RV を計算し（それを $RV_t^{(o)}$ と表す）、それに日次リターン $\{R_1, \dots, R_T\}$ の標本分散と $RV_t^{(o)}$ の標本平均との比率 $\sum_{i=1}^T (R_i - \bar{R})^2 / \sum_{i=1}^T RV_i^{(o)}$ を掛けるという方法を提案しており、本稿もそれに従った。ここで、 \bar{R} は日次リターン $\{R_1, \dots, R_T\}$ の標本平均を表す。

具体的には、まず、日経NEEDS-TICKデータより1996年3月11日から2006年3月31日までの日経225の5分ごとの価格を抽出した。日経NEEDS-TICKデータには、前場は9:01から11:00（もしくは11:00過ぎ）まで、後場は12:31から15:00（もしくは15:00過ぎ）までの1分ごとの日経225の価格が記録されており¹、その中から前場については9:01, 9:05, 9:10, ..., 10:55の価格と前場の終値を、後場については12:31, 12:35, 12:40, ..., 14:55の価格と後場の終値を5分ごとの価格として抽出した。大納会、大発会は前場しか取引がないので、同様に前場の価格だけ抽出した。次に、これらの5分ごとの価格の対数階差を100倍することにより、5分ごとのリターンを計算した。最後に、それらの2乗を足し合わせて夜間と昼休みを無視した $RV_t^{(o)}$ を計算し、それに上記Hansen and Lunde (2005)の調整係数を掛け合わせることで、最終的な RV を計算した。

3. IV の計算方法

IV も RV 同様、1996年3月11日から2006年3月31日までのすべての営業日について計算を行った。 IV を計算

* 本研究は一橋大学21世紀COEプログラム「社会科学の統計分析拠点構築」および文部科学省特別研究促進費「高頻度データを用いた日本の証券市場の計量分析」より助成を受けている。

¹ 東京証券取引所の取引は前場は11:00まで、後場は15:00までであるが、NEEDS-TICKデータでは実際に取引があった時刻ではなく日経225が算出された時刻が入力されているため、11:00や15:00を超えることがある。

する場合、通常、ブラック=ショールズの公式が用いられるが、この公式はボラティリティが満期まで一定であると仮定するので、ボラティリティが日々変動する場合には正しくない。しかし、ここでは簡単化のため、ブラック=ショールズ公式をそのまま用いて IV を計算した²。

オプションにはコール、プットがあり、また、日々、権利行使価格や限月の異なるものが取引されている。それぞれのオプション価格から計算される IV は異なるので、その中のどの IV を用いたらよいか、あるいはそれらの IV をどのように組み合わせればよいかという問題が生じる。この点に関してはこれまでにさまざまな方法が提案されているが、本稿では、Martens and Zein (2004) に従い、以下のように計算を行った。

[1] 各営業日において、翌月が限月で、権利行使価格が原資産価格の前後のコール、プットオプションのデータだけを抽出する。すなわち、各営業日で用いるのはコール、プットそれぞれ2つ、計4つのオプションだけであり、その中のコールの権利行使価格を $K_{c1t} < K_{c2t}$ 、プットの権利行使価格を $K_{p1t} < K_{p2t}$ 、原資産価格を S_t とすると、 $K_{p1t} < S_t < K_{p2t}$ である。

[2] ブラック=ショールズ公式を用いてそれぞれのオプション価格から4つの IV を計算する。東京証券取引所の現物取引の終了時刻が15:00なのに対して、大阪証券取引所のオプション取引の終了時刻は15:10なので、オプション価格は、原資産価格に合わせて、15:00の最終の約定価格を用いた。また、安全資産の金利にはCD1ヶ月物を用いた³。以下、権利価格 K_{c1t}, K_{c2t} のコールオプションから計算された IV を IV_{c1t}, IV_{c2t} 、権利行使価格 K_{p1t}, K_{p2t} のプットオプションから計算された IV を IV_{p1t}, IV_{p2t} と表す。

[3] [2]で計算された4つの IV を以下のように加重平均したものを最終的な IV とする。

$$IV_t = 0.5\omega_{c1}IV_{c1t} + 0.5(1-\omega_{c1})IV_{c2t} + 0.5\omega_{p1}IV_{p1t} + 0.5(1-\omega_{p1})IV_{p2t} \quad (4)$$

ここで、

$$\omega_{c1} = \frac{K_{c2t} - S_t}{K_{c2t} - K_{c1t}}, \quad \omega_{p1} = \frac{K_{p2t} - S_t}{K_{p2t} - K_{p1t}}$$

4. 基本統計量による比較

図1は第2、第3節の方法で計算した RV と IV を描いたものである。概して似通った動きをしているが、 IV よりも RV の方が変動が大きいのが見て取れる。

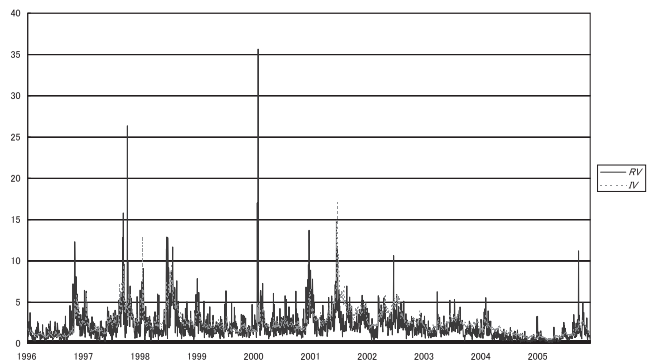


図1 RV と IV

表1には、 RV 、 IV およびそれらの対数値の基本統計量が計算されている。平均は RV (またはその対数値) よりも IV (またはその対数値) が高くなっている。それに対して、標準偏差は IV (またはその対数値) よりも RV (またはその対数値) が高くなっており、このことから RV の方が変動が激しいことがわかる。

表1 RV と IV の基本統計量

	RV	IV	$\log(RV)$	$\log(IV)$
平均	2.113	2.464	0.467	0.746
標準偏差	1.906	1.496	0.764	0.561
最小値	0.129	0.391	-2.048	-0.938
最大値	35.638	17.049	3.573	2.836

ボラティリティには高い自己相関が存在することがよく知られており、こうした現象はボラティリティ・クラスタリングと呼ばれる⁴。また、 RV は単に自己相関が高いだけでなく長期記憶過程に従っていることが知られている⁵。そこで、図2に RV 、 IV およびそれらの対数値の標本自己相関係数を示している。すべての系列で高い自己相関が観測されており、ラグをかなり長くしてもまだ高い自己相関が残っている。これは長期記憶過程に従う系列の特徴である。 RV (またはその対数値) よりも IV (またはその対数値) の方がより高い自己相関を示しているが、これはボラティリティが日々変動する場合にブラック=ショールズ公式を用いて IV を計算すると、現在から満期までのボラティリティの平均値が求まり⁶、ボラティリティがオーバーラップする期間があるためであると考えられる⁷。

⁴ 詳しくは、渡部(2000)を参照のこと。

⁵ 長期記憶過程やそれを表すARFIMAモデルについて詳しくは、矢島(2003)、渡部・佐々木(2006)を参照のこと。

⁶ ただし、厳密に平均値になるためには、投資家が危険中立的、ボラティリティの変動に非対称性がないなどの仮定が必要である(Hull and White 1987)。

⁷ 例えば、 IV_t と IV_{t-k} ($k=1,2,\dots$) では、オプションの満期が同じであれば、 t 期から満期までのボラティリティがオーバーラップしている。こうしたオプションデータのオーバーラップの問題点や対処法については、Christensen et al. (2001)、Christensen and Nielsen (2006) を参照のこと。

² ボラティリティが変動する場合の IV の計算方法に、Britten-Jones and Neuberger (2000) がある。

³ 配当は考慮していない。

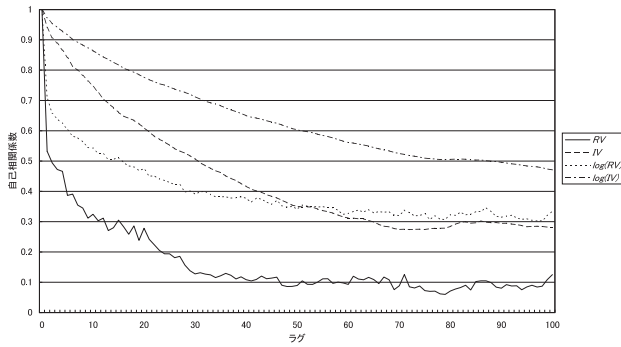


図2 自己相関

5. ボラティリティの予測

前節で述べたように、 RV は長期記憶過程に従っていることが知られている。また、株式市場では株価が下がった日の翌日の方が株価が上がった日の翌日と比べてボラティリティがより上昇する傾向があることが知られている⁸。これら2つの現象と整合的なモデルにARFIMAXモデルがあり、渡部・佐々木(2006)は、将来のボラティリティを予測する上で、このモデルのパフォーマンスが高いことを示している。そこで、最後に、ARFIMAXモデル⁹

$$(1-L)^d \{ \log(RV_t) - \mu_0 - \mu_1 |R_{t-1}| - \mu_2 D_{t-1} |R_{t-1}| \} = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1} \quad (5)$$

と、それに IV を説明変数として加えた

$$(1-L)^d \{ \log(RV_t) - \mu_0 - \mu_1 |R_{t-1}| - \mu_2 D_{t-1} |R_{t-1}| - \mu_3 \log(IV_{t-1}) \} = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1} \quad (6)$$

とでそれぞれ1期先のボラティリティ(RV)の予測値を計算し、予測精度を比較した。ここで、 D_{t-1} は $R_{t-1} < 0$ であれば1、それ以外であれば0をとるダミー変数で、 ε_t はホワイトノイズである。 L はラグ・オペレータを表し、 $L^i x_t = x_{t-i}$ ($i = 0, 1, \dots$)である。また、 $(1-L)^d$ は次のように表せる。

$$(1-L)^d = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(d-1)\cdots(d-k+1)}{k!} (-L)^k \quad (7)$$

1期先の RV の予測値は次のように計算した。まず、1期から1,200期までの標本を使ってパラメータをBeran(1995)の近似最尤法(approximate maximum likelihood method)によって推定し¹⁰、その下で1,201期の RV の予測値 $\hat{RV}_{1,201}$ を計算する。次に、2期から1,201期までの標本を使って同様にパラメータを推定し、その下で1,202

期の RV の予測値 $\hat{RV}_{1,202}$ を計算する。以上を繰り返すことにより、各モデルについて1,275個の RV の1期先予測値 $\{\hat{RV}_{1,201}, \dots, \hat{RV}_{2,475}\}$ を計算した。

これらを用いて平均2乗誤差率(Root Mean Square Percentage Error: $RMSPE$)

$$RMSPE = \sqrt{\frac{1}{1,275} \sum_{t=1,201}^{2,475} \left(1 - \frac{\hat{RV}_t}{RV_t} \right)^2} \quad (8)$$

を計算した¹¹。 RV はボラティリティの精度の高い推定量であるため、Andersen and Bollerslev(1998)以降、ボラティリティの予測精度を比較する場合には、ボラティリティの真の値の代理変数にも RV を使うようになってきており、ここでもそれに従った。

結果は表2に示されているが、 IV を加えた(6)式を用いた方が $RMSPE$ が大きく、 IV を加えることによりかえって予測精度が低下していることがわかる。この結果は、1期先のボラティリティに関して IV は追加的な情報を含んでいないことを意味する。

表2 ボラティリティの1期先予測の $RMSPE$

IV なし	IV あり
0.603	0.615

6. 結論と今後の課題

本稿では、日経225の RV と IV の比較を行った。また、 RV のARFIMAXモデルに説明変数として IV を加えることによりボラティリティの予測精度が改善するかどうかについても分析を行い、 IV を加えるとむしろ予測精度が低下するという結果が得られた。ただし、本稿では1期先予測しか行っていないので、今後、2期以上先の予測でも同じ結果が得られるかどうかさらなる分析が必要である。また、 RV と IV はいずれも長期記憶過程に従っているため、両者の関係を分数共積分(fractional cointegration)として捉えようとする研究も行われている(Bandi and Perron 2006, Christensen and Nielsen 2006)。今後、そうした分析も必要であろう。さらに、金融実務の観点からは、ボラティリティの予測だけでなく、 RV や IV のValue-at-Risk(VaR)やオプション価格の計算などへの応用も重要である¹²。

参考文献

[1] Andersen, T. G., and T. Bollerslev (1998), "Answering the

⁸ 渡部(2000)を参照のこと。 ε_t の分布には正規分布を仮定した。

⁹ ARFIMAXの"X"はARFIMAモデルの説明変数に外生変数を加えていることを意味し、(5)式では $|R_{t-1}|$ がそれに相当する。また、(5)、(6)式は正確に言うとARFIMA(0, d, 1)-Xモデルであり、この次数はShwarz Information Criterion(SIC)により選択した。

¹⁰ Beran(1995)の近似最尤法について詳しくは渡部・佐々木(2006)の補論Cを参照のこと。

¹¹ 他に、平均2乗誤差(Root Mean Square Error)、平均絶対誤差(Root Mean Absolute Error)、平均絶対誤差率(Root Mean Absolute Percentage Error)も計算したが、結果は同じなので省略する。

¹² RV のVaRへの応用については、Giot and Laurent(2004)、渡部・佐々木(2006)を参照のこと。

Skeptics: Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts,” *International Economic Review*, 39, pp. 885-905.

[2] Bandi, F. M. and Perron, B. (2006). “Long Memory and the Relation between Implied and Realized Volatility,” *Journal of Financial Econometrics*, 4, pp. 636-670.

[3] Beran, J. (1995), “Maximum Likelihood Estimation of the Differencing Parameter for Invertible Short and Long Memory Autoregressive Integrated Moving Average Models,” *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 57, pp. 659-672.

[4] Britten-Jones, M. and Neuberger, A. (2000), “Option Prices, Implied Price Processes, and Stochastic Volatility,” *Journal of Finance*, 55, pp. 839-866.

[5] Christensen, B., Hansen, C. and Prabhala, N. (2001), “The Telescoping Overlap Problem in Options Data,” Working Paper, University of Maryland.

[6] Christensen, B. and Nielsen, M. (2006), “Asymptotic Normality of Narrow-band Least Squares in the Stationary Fractional Cointegration Model and Volatility Forecasting,” *Journal of Econometrics*, 133, pp. 343-371.

[7] Giot, P. and Laurent, S. (2004), “Modelling Daily

Value-at-Risk Using Realized Volatility and ARCH Type Models,” *Journal of Empirical Finance*, 11, pp. 379-398.

[8] Hansen, P. R. and Lunde, A. (2005), “A Realized Variance for the Whole Day Based on Intermittent High-frequency Data,” *Journal of Financial Econometrics*, 3, pp. 525-554.

[9] Hull, J. and White, A. (1987), “The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities,” *Journal of Finance*, 42, pp. 281-300.

[10] Martens, M. and Zein, J. (2004), “Predicting Financial Volatility: High-Frequency Time-Series Forecasts Vis-à-vis Implied Volatility,” *Journal of Futures Markets*, 24, pp. 1005-1028.

[11] 矢島美寛 (2003) 「長期記憶をもつ時系列モデル」 刈屋武昭・矢島美寛・田中勝人・竹内啓著『経済時系列の統計—その数理的基礎 統計科学のフロンティア 8』 第Ⅱ部, 岩波書店, pp. 103-202.

[12] 渡部敏明 (2000) 『ボラティリティ変動モデル』 朝倉書店.

[13] 渡部敏明・佐々木浩二 (2006) 「ARCH型モデルと “Realized Volatility” によるボラティリティ予測とバリュエーション・アット・リスク」『金融研究』 第25巻別冊第2号, pp. 39-74.