

## 解 説

### 日経225先物価格のRealized Volatility

日本銀行金融研究所シニアフェロー 渡部 敏明<sup>i</sup>

#### 1. はじめに

資産価格の対数値  $p(t)$  が伊藤過程

$$dp(t) = \sigma(t)dW(t) \quad (1)$$

に従っているとすると、第  $t$  日のボラティリティは、

$$\sigma_t^2 = \int_t^{t+1} \sigma^2(\omega)d\omega \quad (2)$$

と表される<sup>ii</sup>。ここで、第  $t$  日の日中の  $n$  個の価格変化率  $r_{t+i/n}$  ( $i=1, \dots, n$ ) を用いて計算される

$$\tilde{\sigma}_t^2 = \sum_{i=0}^{n-1} r_{t+i/n}^2 \quad (3)$$

は、 $n \rightarrow \infty$  とすると、(2)式の  $\sigma_t^2$  に確率収束する。(3)式によって計算される  $\tilde{\sigma}_t^2$  はRealized Volatility (以下、RV と呼ぶ) と呼ばれ、資産価格の高頻度データが利用可能になってきたことにより、近年、欧米を中心に注目が集まっており、将来のボラティリティの予測 (Blair et al. 2001, Martens 2002, Hol 2003) やVaR (Giot and Laurent 2004) などにも応用されている。日本の株式市場のRVについては、東京都立大学COEプログラム「金融市場のミクロ構造と制度設計」において研究が行われ、柴田(2004)、柴田・渡部(2004)では日経225先物価格についてRVを用いることにより将来のボラティリティの予測能力が高まること示されている。ただし、そこではRVをGARCHモデルのボラティリティの説明変数に加えているだけで、RV自体の変動特性については分析していない。RV自体の変動特性を明らかにし、そうした特性を考慮したモデルを用いて将来のボラティリティの予測やVaRの計算を行うということも重要である。

そうした観点から、本稿では、日経225先物価格のRVを計算し、その変動特性について分析を行った。こうしたRVの変動特性については欧米では盛んに研究されて

おり、RVは長期記憶過程に従っていることが明らかになっている。そこで、本稿では、日経225先物価格のRVが長期記憶過程に従っているのかどうか分析を行った。株式市場では価格が上がった日の翌日より下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇する傾向があることが知られているので、日経225先物価格のRVにもそうした非対称性が観測されるかどうか、また曜日による違いがあるかどうかについても分析を行っている。

#### 2. RVの計算方法

前節の議論によると、RVの計算では、日中の価格変化率の時間間隔をできるだけ短くし  $n$  をできるだけ大きくした方が望ましいということになるが、あまり時間間隔を短くすると市場のミクロ構造に起因するノイズを拾ってしまう可能性がある<sup>iii</sup>。そこで、本稿でも、日経225先物の5分間隔の価格変化率を用いてRVの計算を行った。標本期間は2000年1月4日から2003年12月30日までの計985日である。また、日経225先物は日々限月の異なる先物が同時に取引されているので、限月に入るまでは期近物の価格を用い、限月に入った次限月のものに切り替えた。

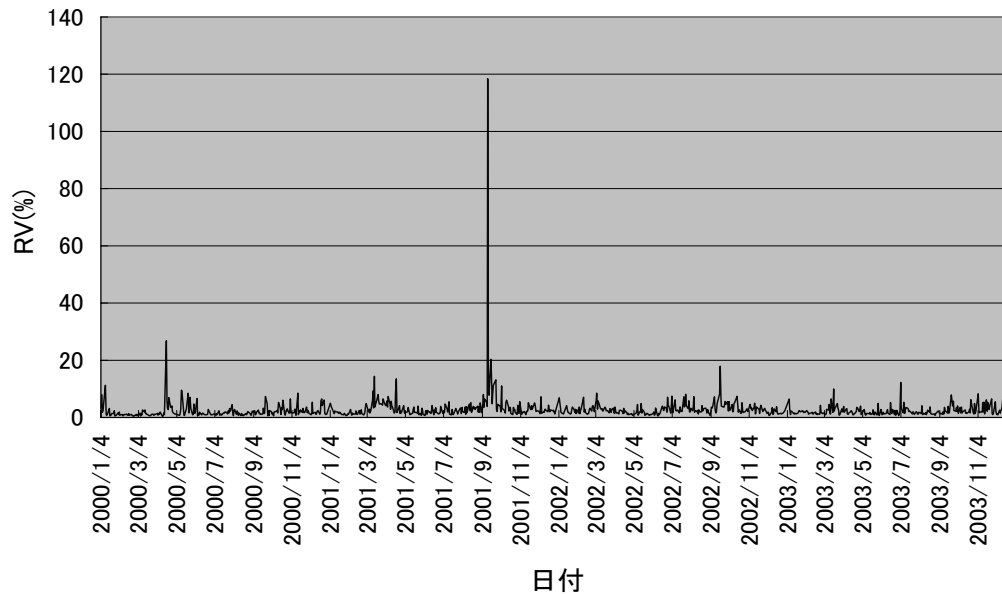
具体的な計算は以下のように行った。(1)まず、日経225先物価格のティックデータから5分ごとに価格を抽出した。ただし、前場および後場の取引開始後、最初に約定するまでの時刻の価格には最初の約定価格を、前場が終了する11:00 (大発会と大納会は11:10) と後場が終了する15:10の価格にはそれぞれ前場と後場の最終の約定価格を採用した<sup>iv</sup>。それ以外の時刻については、その時刻の前で最もその時刻に近い約定価格を採用した<sup>v</sup>。(2)次に、それらの5分ごとの価格の対数階差をとることにより価格変化率を計算した。ただし、前日の後場の取引終了時から前場の取引開始時まで (以下、この時間帯を夜間と呼ぶ) と前場の取引終了時から後場の取引開始時まで (以下、昼休みと呼ぶ) は取引が無いので、5分間隔の価格変化率を計算することができない。こうした夜間と昼休みの価格変化率は時間間隔が長くノイズを含んでいる可能性がある<sup>vi</sup>。それらを直接用いないでRVを計算する方法も提案されている (柴田 2004, 柴田・渡部 2004 参照) が、本稿では夜間と昼休みの価格変化率をそのまま用いた<sup>vi</sup>。(3)最後に、前日の後場の取引終了時か

ら前場の取引開始時までの夜間の価格変化率, 昼休みの価格変化率, 前場と後場の5分間隔の価格変化率をすべて2乗して足し合わせることで, RVを計算した。

図1はこのようにして計算したRVを図示したもので

ある。RVが120%近くまで上昇している日があるが, これはアメリカの同時テロの翌日であり, 以下ではその日を除いて分析を行っている。

図1 日経225先物価格のRealized Volatility



### 3. ARFIMAモデル

これまでの欧米での実証分析でRVは長期記憶過程に従うことが明らかになっている。ある変数の $h$ 次の自己相関係数を $\rho(h)$ とするととき,

$$\sum_{h=0}^{\infty} |\rho(h)| < \infty \quad (4)$$

となる場合, その変数は短期記憶定常過程に従うといい,

$$\sum_{h=0}^{\infty} |\rho(h)| = \infty \quad (5)$$

となる場合, 長期記憶定常過程に従うという。(長期記憶過程や以下のARFIMAモデルについて詳しくはBeran 1994 や矢島 2003 を参照のこと。)したがって, 長期記憶定常過程に従う変数は短期記憶定常過程に従う変数よりもショックの持続性が高い。

本稿では長期記憶モデルの一つであるARFIMA (Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average) モデルを用いて分析を行った。具体的には, 次のモデルを推定した。

$$y_t = \ln(RV_t) - \mu_t \quad (6)$$

$$\phi(L)(1-L)^d y_t = \varepsilon_t \quad (7)$$

$$\mu_t = \alpha + \beta D_{t-1}^- + \delta_1 D_t^M + \delta_2 D_t^{Tu} + \delta_3 D_t^{Th} + \delta_4 D_t^F \quad (8)$$

ここで,  $L$ はラグオペレータを表し,  $L^i y_t = y_{t-i}$ である。

また,

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p \quad (9)$$

$$(1-L)^d = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d(d-1)\dots(d-j+1)}{j!} (-L)^j \quad (10)$$

であり, (9)式は定常性の条件を満たすものとする。(10)式は左辺を2項級数展開することにより得られる。

(6), (7)式はRVの対数値 $\ln(RV_t)$ からその平均 $\mu_t$ を引いた $y_t$ がARFIMA(p, d, 0)モデルに従うことを表している<sup>vii</sup>。 $d=0$ の場合には,  $(1-L)^d = 1$ なので, (7)式は定常なAR(p)モデル $\phi(L)y_t = \varepsilon_t$ になり,  $d=1$ の場合には, (7)式はARIMA(p, 1, 0)モデル $\phi(L)(y_t - y_{t-1}) = \varepsilon_t$ になる。 $0 < d < 0.5$ の場合には $y_t$ は長期記憶定常過程に従い,  $0.5 \leq d < 1$ の場合には非定常になる。

(8)式の右辺の $D_{t-1}^-$ は $t-1$ 期の価格変化率が負であれば1, それ以外であれば0となるダミー変数である。株式市場では, 価格が上がった日の翌日より下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇する傾向があることが知られており,  $\beta > 0$ であれば, この現象と整合的である。また,  $D_t^M$ ,  $D_t^{Tu}$ ,  $D_t^{Th}$ ,  $D_t^F$ はそれぞれ

月曜日, 火曜日, 木曜日, 金曜日に対応する曜日ダミーであり, 例えば  $D_t^M$  は  $t$  期が月曜日であれば 1, それ以外の曜日であれば 0 になる。

#### 4. 推定結果

表 1 は (6)-(10) 式のパラメータの推定結果をまとめたものである。推定には Beran (1995) の最尤法を用い,  $\phi(L)$  の次数  $P$  は AIC を用いて選択した結果,  $P = 2$  が選択された。

表 1 推定結果

パラメータ	$d$	$\alpha$	$\beta$
推定値	0.4439	0.5825	0.0612
標準誤差	0.0509	0.2762	0.0333
パラメータ	$\delta 1$	$\delta 2$	$\delta 3$
推定値	0.0495	0.0478	0.0001
標準誤差	0.1031	0.0992	0.1539
パラメータ	$\delta 4$	$\phi 1$	$\phi 2$
推定値	0.0445	-0.2019	-0.1084
標準誤差	0.1055	0.0619	0.0467

##### (1) RVの長期記憶性について

$d$  の推定値と標準誤差はそれぞれ 0.4439 と 0.0509 である。このことから,  $d$  は 0 より大きく 1 よりも小さいこと, すなわち, 日経225先物価格のRVも長期記憶過程に従っていることがわかる。ただし,  $d$  の推定値は 0.5 より小さいものの,  $d = 0.5$  という帰無仮説は棄却されないの, 定常か非定常かは判断できない。

##### (2) RVの非対称性について

$\beta$  の推定値と標準誤差はそれぞれ 0.0612 と 0.0333 であり, このことから日経225先物価格のRVにも価格が上がった日の翌日より下がった日の翌日の方がより上昇する傾向があることがわかる。

##### (3) RVの曜日効果について

曜日ダミーの係数  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$  はすべて統計的に有意ではない。すなわち, 日経225先物価格のRVには曜日による違いは観測されない。

#### 5. まとめ

本稿では, 日経225先物価格のRVの変動特性について分析を行った。現在, (6)-(10) 式のようなRVの時系列モデルを用いて将来のボラティリティの予測やVaRの計算を行った場合にパフォーマンスが高まるかどうかについても分析を進めている<sup>viii</sup>。

#### 参考文献

- [1] Bandi, F. M. and Russell, J. R. (2004), "Separating Microstructure Noise from Volatility," Discussion Paper, Graduate School of Business, University of Chicago.
- [2] Beran, J. (1994), *Statistics for Long-Memory Processes*, Chapman and Hall.
- [3] Beran, J. (1995), "Maximum Likelihood Estimation of Differencing Parameter for Invertible Short and Long Memory Autoregressive Integrated Moving Average Models," *Journal of the Royal Statistical Society B*, 57, 659-672.
- [4] Blair, B. J., Poon, S. and Taylor, S. J. (2001), "Forecasting S&P100 Volatility: The Incremental Information Content of Implied Volatilities and High-frequency Index Returns," *Journal of Econometrics*, 105, 5-26.
- [5] Giot, P. and Laurent, S. (2004), "Modelling Daily Value-at-Risk Using Realized Volatility and ARCH Type Models," *Journal of Empirical Finance*, 11, 379-398.
- [6] Ghysels, E., Santa-Clara, P. and Valkanov, R. (2005), "Predicting Volatility: Getting the Most out of Return Data Sampled at Different Frequencies," *Journal of Econometrics*, forthcoming.
- [7] Hol, E. M. J. H. (2003), *Empirical Studies on Volatility in International Stock Markets*, Kluwer Academic Publishers.
- [8] Martens, M. (2002), "Measuring and Forecasting S&P 500 Index-futures Volatility Using High-frequency Data," *Journal of Futures Markets*, 22, 497-518.
- [9] 柴田舞 (2004) 「Realized Volatility を用いたGARCHモデルの予測力の比較」東京都立大学大学院社会科学研究所博士論文第2章。
- [10] 柴田舞・渡部敏明 (2004) 「東京都立大学21世紀

COEプログラム研究レポート (第4回) Realized Volatility  
を用いた日経225先物価格のボラティリティの予測」大阪  
証券取引所『先物オプションレポート』Vol. 16 No. 12,  
2-5.

[11] 矢島美寛 (2003)「長期記憶をもつ時系列モデル」  
刈屋武昭・矢島美寛・田中勝人・竹内啓著『経済時系列  
の統計 その数理的基礎』第II部 pp. 103-202.

<sup>i</sup> 本稿の内容は筆者個人に属し、日本銀行および金融研究所の  
公式な意見を示すものではない。また、本稿で用いた日経225  
先物価格のティックデータは東京都立大学COEプログラム「金  
融市場のマイクロ構造と制度設計」で購入したものであるが、東  
京都立大学 (あるいは首都大学東京) に所属するため、東京都  
立大学経済学部非常勤講師として利用した。

<sup>ii</sup> (1)式の  $W(t)$  はウイナー過程に従う変数である。また、ファ

イナンスでは通常  $\sigma_t$  のことをボラティリティと呼ぶが、本稿で  
は  $\sigma_t^2$  のことをボラティリティと呼ぶ。

<sup>iii</sup> Bandi and Russell (2004) はマイクロ構造に起因するノイズを考  
慮に入れて最適な時間間隔を選択する方法を提案している。

<sup>iv</sup> 例えば、9:08にその日の最初の約定があった場合は、9:00と  
9:05の価格には9:08の最初の約定価格を採用した。

<sup>v</sup> 例えば、9:35の前に既に約定している場合には、9:35の価格  
には9:35の前で最も9:35に近い約定価格を採用した。

<sup>vi</sup> 柴田(2004)、柴田・渡部(2004)で提案されている夜間と昼休  
みの価格変化率を用いなくて分散比を使って調整する方法でも  
RVを計算したが、結果はほとんど変わらなかったため、割愛す  
る。

<sup>vii</sup> 単純化のため、本稿ではMA項は無視した。

<sup>viii</sup> 第1節で引用した文献ではRVを用いることで将来のボラテ  
ィリティの予測能力が改善しているが、その一方で、Ghysels,  
Santa-Clara and Valkanov (2005) ではRVを用いても予測能力は  
改善しないとの結果が得られている。

### 日経平均株価構成銘柄の一部入替について

㈱日本経済新聞社は、日経平均株価の構成銘柄の一部入替について、以下のとおり発表いたしました。  
記

#### 日経平均株価

除外銘柄(コード)		補充銘柄(コード)		実施日
カネボウ	(3102)	—	—	平成17年5月13日
—	—	三井化学	(4183)	平成17年5月17日

### MSCI JAPAN Index構成銘柄の除外について

モルガン・スタンレー・キャピタル・インターナショナル社は、定期見直しに伴い、平成17年5月31日(火)の取引終了  
後に、以下のとおりMSCI JAPAN Index構成銘柄の一部入替を実施することについて発表いたしましたので、お知ら  
せいたします。

除外銘柄(コード)		追加銘柄(コード)		実施日
雪印乳業	(2262)	博報堂D Yホールディングス	(2433)	平成17年5月31日(火)
カネボウ	(3102)	トクヤマ	(4043)	
サイゼリヤ	(7581)	イビデン	(4062)	
カブコン	(9697)	田辺製薬	(4508)	
		参天製薬	(4536)	
		インデックス	(4835)	
		コーセー	(4922)	
		住友ゴム工業	(5110)	
		日本電気硝子	(5214)	
		東京製鐵	(5423)	
		大同特殊鋼	(5471)	
		日本発條	(5991)	
		千代田化工建設	(6366)	
		グローリー工業	(6457)	
		安川電機	(6506)	
		エルピーダメモリ	(6665)	
		豊田通商	(8015)	
		キヤノン販売	(8060)	
		西日本シティ銀行	(8327)	
		京都銀行	(8369)	
		ソフトバンク・インベストメント	(8473)	
		S F C G	(8597)	
		新光証券	(8606)	
		三菱証券	(8615)	
		松井証券	(8628)	
		イー・トレード証券	(8701)	
		東京建物	(8804)	
		エヌ・ティ・ティ都市開発	(8933)	
		日本プライムリアルティ投資法人	(8955)	
		野村不動産オフィスファンド投資法人	(8959)	
		京成電鉄	(9009)	
		イー・アクセス	(9427)	
		K D D I	(9433)	
		光通信	(9435)	