

## 解 説

### 「日経225先物価格を用いた FIEGARCHモデルの推定」<sup>1</sup>

日本銀行金融研究所シニアフェロー

渡部 敏明

日本銀行金融研究所リサーチアソシエイト

佐々木浩二

#### 1. はじめに

資産価格のボラティリティは一旦上昇(下落)するとしばらくボラティリティが高い(低い)期間が続くことが知られている。この現象は「ボラティリティ・クラスタリング」と呼ばれ、ボラティリティ変動を定式化する場合に最も重視される。近年、そうしたボラティリティのショックの高い持続性を表すには、定常なARMAモデルのような短期記憶モデルよりも、ARFIMAモデルのような長期記憶モデルの方が適しているとの研究結果が多く得られている<sup>2</sup>。日経225先物価格についても、渡部(2005)、Watanabe and Yamaguchi (2005)が、Realized Volatilityと呼ばれる日中の価格変化率から計算されるボラティリティが長期記憶過程に従っていることを示している。

本稿では、日経225価格変化率の日次データを用いてボラティリティ変動モデルを推定した場合に、同様にボラティリティの変動に長期記憶性が観測されるかどうか分析を行ったものである。ボラティリティ変動モデルの中にも、FIGARCH (Baillie, Bollerslev and Mikkelsen 1996)、FIEGARCH (Bollerslev and Mikkelsen 1996)、長期記憶確率的ボラティリティ変動モデル (Breidt, Crato, and de Lima 1998, Harvey 1998) といったボラティリティの変動を長期記憶過程として定式化するモデルがある。こうしたモデルの中で、本稿では特にFIEGARCHモデルを推定している。このモデルは、Nelson (1991) が提案したEGARCHモデルをボラティリティの長期記憶性を考慮して発展させたもので、最尤法によって簡単に推定ができ、かつ価格が上がった日の翌日より価格が下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇する傾向があるという株式市場でよく知られているボラティリティ変動の非対称性を捉えることができる。そこで、本稿では、FIEGARCHモデルを推定することにより、日経225先物価格のボラティリティが長期記憶過程に従っているかどうか

だけでなく、そうしたボラティリティ変動の非対称性が観測されるかどうか、また休日の日数がボラティリティに与える影響についても分析を行った。

#### 2. モデル

本稿で推定に用いたモデルは次のAR(1)-FIEGARCH (1, d, 0)モデルである<sup>3</sup>。

$$R_t = \rho_0 + \rho_1 R_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (1)$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim i.i.d.N(0,1),$$

$$(1 - \phi L)(1 - L)^d \{\log(\sigma_t^2) - \omega - \ln(1 + \delta N_t)\} = g(z_{t-1}), \quad (2)$$

$$g(z_{t-1}) = \theta z_{t-1} + \gamma \left( |z_{t-1}| - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right).$$

(1)式は価格変化率 $R_t$ の変動をAR(1)モデルによって定式化している。誤差項 $\varepsilon_t$ はボラティリティ $\sigma_t$ と基準化した誤差項 $z_t$ の積として表され、 $z_t$ は過去と独立な標準正規分布に従うものと仮定する。

(2)式はボラティリティの2乗の自然対数値 $\log(\sigma_t^2)$ の変動を表す式である。 $N_t$ は $t-1$ 営業日から $t$ 営業日までの休みの日数を表す。ボラティリティが市場に入ってくる情報量によって決まり、市場が閉まっている時も市場が開いている時と同じスピードで情報が入ってくるなら、 $\delta=1$ となる。しかし、先行研究では、 $\delta$ は0よりも有意に大きいものの1よりは有意に小さい推定値が得られており、休みの日数が長くなるとボラティリティは上昇するものの、情報が入ってくるスピードは市場が閉まっている時の方が遅いという結果が得られている<sup>4</sup>。

$g(z_{t-1})$ の中の $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ は $z_{t-1}$ の期待値 $E[z_{t-1}]$ である<sup>5</sup>。また、 $g(z_{t-1})$ は $z_{t-1}$ の符号に依存して次のような形になる。

$$g(z_{t-1}) = \begin{cases} (\gamma + \theta) |z_{t-1}| - \gamma \sqrt{\frac{2}{\pi}} & \text{if } z_{t-1} \geq 0 \\ (\gamma - \theta) |z_{t-1}| - \gamma \sqrt{\frac{2}{\pi}} & \text{if } z_{t-1} < 0 \end{cases}$$

そこで、 $\theta < 0$ であれば、価格が上がった日の翌日より価格が下がった日の翌日の方がよりボラティリティが上昇することになる。

$L$ はラグオペレータを表し、

$$L^j x_t = x_{t-j},$$

$$(1-L)^d = 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d(d-1)\cdots(d-j+1)}{j!} (-L)^j$$

である。また、パラメータ $\phi$ は $|\phi| < 1$ を満たすものとすると、 $d=0$ の場合には、 $(1-L)^d = 1$ なので、(2)式は、

$$(1 - \phi L) \{\log(\sigma_t^2) - \omega - \ln(1 + \delta N_t)\} = g(z_{t-1}), \quad (2')$$

すなわち、定常なEGARCH(1, 0)モデルになる。また、 $d=1$ の場合には、(2)式は

$$(1-\phi)(1-L)\{\log(\sigma_t^2)-\omega-\ln(1+\delta V_t)\}=g(z_{t-1}), \quad (2'')$$

と非定常な IEGARCH(1, 1, 0) モデルになる。  $0 < d < 1$  の場合には  $\log(\sigma_t^2)$  は長期記憶過程に従い、  $0 < d < 0.5$  であれば定常な長期記憶過程、  $0.5 \leq d < 1$  であれば非定常な長期記憶過程に従う。

(2)式は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \log(\sigma_t^2)-\omega-\ln(1+\delta V_t) \\ &= (1-\phi L)^{-1}(1-L)^{-d} g(z_{t-1}), \\ &= g(z_{t-1})+\lambda_2 g(z_{t-2})+\lambda_3 g(z_{t-3})+\dots \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= d + \phi \\ \lambda_i &= d\lambda_{i-1} + \frac{d(d+1)\dots(d+i-2)}{(i-1)!} \quad (i=3,4,\dots) \end{aligned}$$

長期記憶過程モデルを推定する上での問題点は、このように変数が過去の無限期前までのショックに依存することである。しかし、FIEGARCHモデルでは、  $E[g(z_t)] = 0$  なので、  $g(z_t) = 0$  ( $t = 0, -1, \dots$ ) と仮定すると、

$$\begin{aligned} \log(\sigma_t^2)-\omega-\ln(1+\delta V_t) \\ &= g(z_{t-1})+\lambda_2 g(z_{t-2})+\dots+\lambda_{i-1} g(z_t) \end{aligned}$$

となり、ボラティリティを逐次的に計算することができる。それによって尤度を計算することができるので<sup>6</sup>、本稿ではパラメー ( $\rho_0, \rho_1, d, \omega, \delta, \phi, \theta, \gamma$ ) を同時に最尤推定した。

### 3. 推定結果

本稿で用いたデータは1995年1月4日から2004年12月30日までの日経225先物の期近物の終値である。価格変化率  $R_t$  には終値の対数階差に100を掛けて%にしたものを用いた。価格変化率のサンプル数は2463である。

表1はAR(1)-FIEGARCH(1, d, 0)モデルのパラメータ推定値をまとめたものである。標準誤差は基準化した誤差項  $z_t$  の分布が正規分布でない可能性を考慮して Bollerslev and Wooldridge (1992) の方法により計算した<sup>7</sup>。

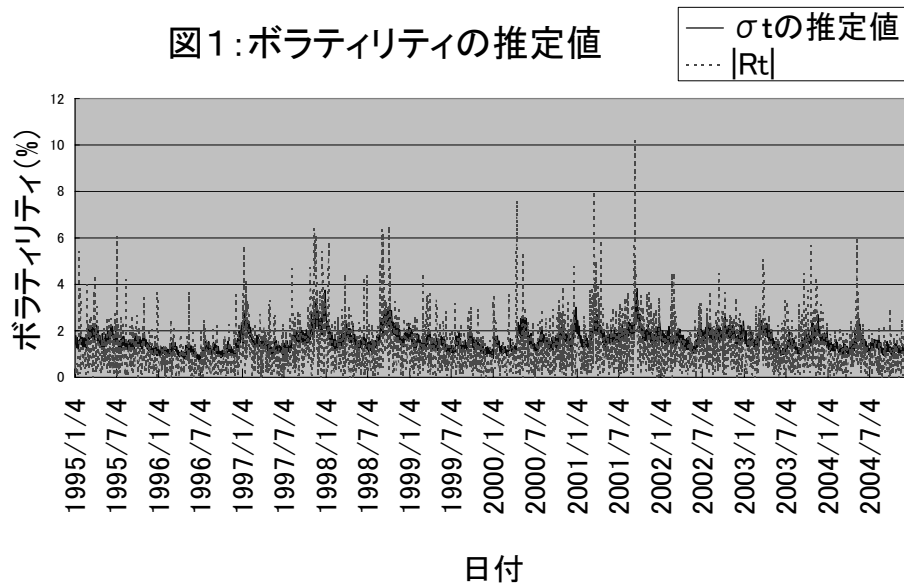
表1：推定結果

| パラメータ    | 推定値    | 標準誤差  |
|----------|--------|-------|
| $\rho_0$ | -0.032 | 0.027 |
| $\rho_1$ | -0.056 | 0.021 |
| $d$      | 0.326  | 0.150 |
| $\omega$ | 0.782  | 0.197 |
| $\delta$ | 0.285  | 0.066 |
| $\phi$   | 0.899  | 0.051 |
| $\theta$ | -0.057 | 0.013 |
| $\gamma$ | 0.082  | 0.022 |

まず、ボラティリティが短期記憶か長期記憶か、また定常か非定常かを表すパラメータ  $d$  の推定値および標準誤差はそれぞれ0.326と0.150である。このことから、  $d$  は有意に正であり、日経225先物価格のボラティリティは長期記憶過程に従っていることがわかる。一方、  $d$  は有意に0.5を下回っていないので、ボラティリティが定常であると結論づけることはできない。次に、ボラティリティ変動の非対称性を表すパラメータ  $\theta$  の推定値と標準誤差はそれぞれ-0.057と0.013であり、このことから日経225先物価格でも価格が上がった日の翌日より下がった日の翌日の方がボラティリティが上昇する傾向があることがわかる。以上の結果は、Realized Volatilityを用いた渡部(2005)の結果と整合的である。

休みの日数がボラティリティに与える影響を表すパラメータ  $\delta$  の推定値と標準誤差はそれぞれ0.285と0.066であり、このことから  $\delta$  は有意に0よりも大きく、1よりも小さいことがわかる。この結果は先行研究と整合的であり、休みの日数が増えればボラティリティは上昇するが、市場が閉まっている時は情報が入ってくるスピードが遅いことを意味する。

図1は、パラメータの値を表1の推定値としたAR(1)-FIEGARCH(1, d, 0)モデルによって計算したボラティリティ  $\sigma_t$  の推定値を価格変化率の絶対値  $|R_t|$  と一緒に描いたものである。



**4. モデルの診断**

最後に、AR(1)-FIEGARCH(1, d, 0)モデルの定式化が正しいかどうかの診断を残差  $\hat{\epsilon}_t$  をボラティリティの推定値  $\hat{\sigma}_t$  で割って基準化した残差  $\hat{z}_t = \hat{\epsilon}_t / \hat{\sigma}_t$  を使って行う。表2は基準化した残差の基本統計量をまとめたものである。

**表2：基準化した残差の基本統計量**

| 統計量                 | 統計値               |
|---------------------|-------------------|
| サンプル数               | 2463              |
| 平均                  | -0.001<br>(0.020) |
| 標準偏差                | 1.004             |
| 歪度                  | -0.182<br>(0.049) |
| 尖度                  | 4.309<br>(0.099)  |
| JB                  | 189.38            |
| LB(10)              | 5.42              |
| LB(10) <sup>2</sup> | 8.71              |

( )内の数値は標準誤差を表す。

モデルの定式化が正しければ基準化した誤差項  $z_t$  は過去と独立で同一な標準正規分布に従う。表2より平均0、標準偏差1という仮説はどちらも棄却されない。また、LB(10)、LB(10)<sup>2</sup>はそれぞれ基準化した残差およびその2乗のLjung and Box (1978) 統計量である。ただし、分散不均一性を考慮して、ここではDiebold (1986) の方法で計算している<sup>8</sup>。これらは、1次から10次の自己相関係

数がすべて0であるという帰無仮説を検定するための統計量で、帰無仮説が正しければ、漸近的に自由度10のカイ2乗分布に従う。基準化した残差、その2乗とも、帰無仮説は有意水準10%でも棄却されない。したがって、ラグ次数の低いAR(1)-FIEGARCH(1, d, 0)モデルでも日経225先物の価格変化率およびボラティリティの自己相関を十分うまく捉えられることがわかる。

しかし、分布に関しては、基準化した誤差が正規分布に従うなら、歪度=0、尖度=3でなければならないが、表2の歪度、尖度の値およびそれらの標準誤差の値から、いずれも有意水準1%で棄却される。また、JBは歪度=0かつ尖度=3という帰無仮説を検定するJarque and Bera (1987) 統計量で、基準化した誤差項が正規分布に従うなら、漸近的に自由度2のカイ2乗分布に従う。したがって、表2のJB統計量の値から、帰無仮説は有意水準1%でも棄却される。これらの結果は基準化した誤差項  $z_t$  の分布が正規分布に従っていないことを意味する。そこで、Value-at-Risk (VaR) のように  $z_t$  の分布まで重要になる場合には、 $z_t$  の分布を標準正規分布ではなく別の分布にする必要がある。

**5. まとめと今後の発展**

本稿では、日経225先物価格の日次データを用いてAR(1)-FIEGARCH(1, d, 0)モデルを推定することにより、日経225先物のボラティリティに長期記憶性および非対称性があることを明らかにした。また、このAR(1)-FIEGARCH(1, d, 0)モデルは日経225先物の価格変化率およびボラティリティの自己相関をうまく捉えられることも示した。

今後はこうしたFIEGARCHモデルを将来のボラティリティの予測, オプション理論価格の導出, VaR等へ応用する予定である。その際, ボラティリティの長期記憶性を考慮したボラティリティ変動モデルには他にもFIGARCHモデルや長期記憶確率的ボラティリティ変動モデルなどがあるので, そうしたモデルやRealized Volatilityを用いた場合との比較も行う予定である<sup>9</sup>。

#### 参考文献

- [1] Baillie, R.T., Bollerslev, T. and Mikkelsen, H.O. (1996), "Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, 74, 3-30.
- [2] Beran, J. (1994), *Statistics for Long-Memory Processes*, Chapman and Hall, London, UK.
- [3] Bollerslev, T. and Mikkelsen, H.O. (1996), "Modeling and pricing long memory in stock market volatility," *Journal of Econometrics*, 73, 151-184.
- [4] Bollerslev, T. and Wooldridge, J.M. (1992), "Quasi-maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time varying covariances," *Journal of Econometrics*, 52, 5-59.
- [5] Breidt, F.J., Crato, N. and de Lima, P. (1998), "The detection and estimation of long memory in stochastic volatility," *Journal of Econometrics*, 83, 325-348.
- [6] Diebold, F. X. (1986), *Empirical modeling of exchange rate dynamics*, Springer-Verlag, New York.
- [7] Hurvich, C.M., Moulines, E. and Soulier, P. (2005), "Estimating long memory in volatility," *Econometrica*, 73, 1283-1328.
- [8] Jarque, C.M. and Bera, A.K. (1987), "Test for normality of observations and regression residuals," *International Statistical Review*, 55, 163-172.
- [9] Ljung, G.M. and Box, G.E.P. (1978), "On a measure of lack of fit in time series models," *Biometrika*, 65, 297-303.
- [10] Nelson, D.B. (1991), "Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach," *Econometrica*, 59, 347-370.
- [11] Watanabe, T. and Yamaguchi, K. (2005), "Measuring, modeling and forecasting realized volatility in the Nikkei 225 stock market," mimeo.
- [12] 矢島美寛 (2003) 「長期記憶をもつ時系列モデル」 刈屋武昭・矢島美寛・田中勝人・竹内啓著『経済時系列の統計 その数理的基礎』第II部 pp.103-202.
- [13] 渡部敏明 (2000) 『ボラティリティ変動モデル』朝倉書店.
- [14] 渡部敏明 (2005), 「日経225先物価格のRealized

Volatility」大阪証券取引所『先物オプションレポート』Vol.17 No.5, 2-5.

<sup>1</sup> 本稿の内容は筆者達個人に属し, 日本銀行および金融研究所の公式な意見を示すものではない。また, 本稿で用いたデータの一部は東京都立大学COEプログラム「金融市場のマイクロ構造と制度設計」で購入したものであり東京都立大学(あるいは首都大学東京)に所属するが, 筆者の一人, 渡部が東京都立大学経済学部非常勤講師であるため利用した。東京都立大学大学院社会科学研究科修士課程の栗原一朗氏にデータのダウンロードおよび整理を手伝ってもらった。ありうべき誤りはすべて筆者達個人に属する。

<sup>2</sup> 短期記憶過程と長期記憶過程の定義およびARFIMAモデルについては, Beran (1994), 矢島 (2003), 渡部 (2005) を参照。

<sup>3</sup> より一般的なAR(m)-FIEGARCH(p,d,q)モデルは次のように表される。

$$R_t = \rho_0 + \rho_1 R_{t-1} + \dots + \rho_m \varepsilon_t,$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim i.i.d.N(0,1),$$

$$(1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p)(1 - L)^d \{ \log(\sigma_t^2) - \omega - \ln(1 + \delta V_t) \}$$

$$= (1 - \psi_1 L - \dots - \psi_q L^q) g(z_{t-1}),$$

$$g(z_{t-1}) = \theta z_{t-1} + \gamma \left( |z_{t-1}| - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right).$$

<sup>4</sup> 渡部 (2000) 2.4.1節参照。

<sup>5</sup> ここでは,  $z_{t-1}$  が標準正規分布に従うと仮定しているので  $E[z_{t-1}] = \sqrt{2/\pi}$  となるが, 別の分布に従っている場合はそうならない。

<sup>6</sup> 尤度の計算方法について詳しくは, 渡部 (2000) 2.2.1節を参照のこと。

<sup>7</sup> この方法について詳しくは, 渡部 (2000) 2.2.3節を参照されたい。

<sup>8</sup> 詳しくは, 渡部 (2000) 1.5.1節参照。

<sup>9</sup> Clifford, Hurvich and Soulier (2005) は長期記憶確率的ボラティリティ変動モデルとFIEGARCHモデルを特殊ケースとして含む一般的なモデルを考え, そのセミパラメトリック推定法を提案している。