

解 説

パワー・リバース・デュアル・ カレンシー債の数理 (2) ～価格形成理論と非完備市場～

山田雅章¹

1. はじめに

前稿[1]では、パワー・リバース・デュアル・カレンシー債 (PRDC) がリバース・デュアル・カレンシー債の発展型として位置付けられることを示した。リバース・デュアル・カレンシー債の場合、外国債券を購入し、国内通貨の借入を行うことによって、発行時点で将来の変動クーポンの支払いを固めることができる²。

しかし、クーポンの為替感応度を高めたPRDCの場合、外国債券と国内通貨の借入だけでは発行時点で将来の変動クーポンの支払いを固めることができない。後述するように、PRDCでは、変動クーポンの支払いを固める際に、外国債券と国内通貨の借入に加えて通貨プットオプションが必要になる。

通貨プットオプション価格は、原資産価格とその価格変動性 (ボラティリティ) および内外金利に依存する。さらに、通貨プットオプションの価格変動³は、原資産価格、ボラティリティ、内外金利の水準によって異なる。この性質はオプションの非線形性と呼ばれる⁴。

リバース・デュアル・カレンシー債からPRDCへと発展する際、価格形成において生じた最大の変化は、この非線形性が盛り込まれたことにある。やっかいなのは、PRDCの変動クーポンの支払いを固める際に必要となる通貨オプションが現実には売買されていないことである (非完備市場⁵)。通貨オプションに関して市場が非完備なので、PRDCの価格形成は複雑なものとなる。

本稿では、まず、PRDCの価格形成における通貨プットオプションの重要度を試算する。次に、市場非完備性が引き起こす複雑な問題を指摘する。

筆者は、本稿の目的をPRDCの本質的な部分をできる限り簡単に、かつ、広範囲の読者に向けて解説することに置いている。従って、理論的正当性が失われない範囲で数学的厳密さを犠牲にしているし、また、コール条項による緩和、発行換わり金の一部を留保することによる非完備性への対応、というようなフィナンシャルエンジニアの実務についても表面的な記述に留めている。読者

に委ねた形になってしまったPRDCの実務上の複雑性については、より深く研究を進める上で手がかりとなるような文献を最後に示した。

PRDCの投資家は、リスク管理の高度化の要請に従って、価格形成や時価評価の面でより深い理解が求められているように思われる。本稿がPRDCの理解を深めるきっかけとなれば幸いである。

2. PRDCのクーポン算出式について

前稿[1]と同様に2004年1月15日時点の市場データの下で、20年物ドルPRDCを例にとって説明することにする。

2004年1月15日時点の円と米ドルの単位額面あたりの割引債価格を表1に示す。

表1 日米割引債価格

年限	円建て	ドル建て
1	0.999	0.985
2	0.997	0.960
3	0.990	0.927
4	0.980	0.888
5	0.966	0.846
6	0.950	0.803
7	0.931	0.760
8	0.912	0.717
9	0.892	0.677
10	0.872	0.638
11	0.851	0.601
12	0.831	0.566
13	0.810	0.533
14	0.791	0.501
15	0.771	0.472
16	0.752	0.444
17	0.733	0.418
18	0.715	0.393
19	0.697	0.370
20	0.680	0.349

(市場データに基づき筆者推定)

最初にPRDCに発展する直前の、20年物円建てリバース・デュアル・カレンシー債を考えよう。表1から、100円の発行価格において、元本価値が占める価値は68円であることが分かる。従って、クーポンには残った32円が充てられる。32円で米ドル建て割引債を1年物から20年物まで一定額面を購入したのがリバース・デュアル・カレンシー債である。

1年物から20年物まで額面1ドルの米ドル建て割引債を購入した場合の価格は、12.847ドルであり⁶、2004年1月15日時点の為替レート：1ドル106.35円で円に換算すると1366円である。従って、32円では額面0.02343ドル⁷の割引債を利払い時点で合わせて20個購入することになる。

リバース・デュアル・カレンシー債に対して、ドル建て割引債の購入量を増やしていったのがPRDCである。つまり、PRDCでは、クーポンレートが下記の(1)式で示されるが、(1)式において、第一項の x/B がドル建て割引債の購入額面であり、第二項の y は円貨建て借入である。ドル建て割引債の購入資金の不足分を円貨建て借入によって補うのがPRDCの構造である。

$$\frac{x}{B} \times S - y \quad \text{か} \quad 0 \quad \text{の大きい方} \quad (1)$$

ただし、 S は利払いで参照されるスポット為替レート。

¹ U F J つばき証券勤務。本稿は筆者の個人的な見解に基づくものであり、いかなる意味においても筆者の所属する機関の意見を表明するものではない。また、筆者は本稿の完全性や正確性を保証しない。

² PRDCのクーポンレートは将来の為替レートに依存するため、発行時点では確定していない。しかし、将来のクーポンレートの支払いに過不足がないように備えることができる場合がある。「将来のクーポンレートの支払いを固めることができる」とは、備えることができる場合をいう。

³ 価格反応度と呼ばれる。オプション理論では「デルタ」という。

⁴ 線形とは直線のことである。例えば、横軸に為替レート、縦軸に損益をとったグラフを想像してみよう。外貨の保有に伴う損益は、このグラフ上では直線で示される。そのため、外貨は線形性の金融商品と呼ばれる。一方、プットオプション (コールオプション) の場合、グラフは左上がり (右上がり) の曲線となることから、非線形性の金融商品と呼ばれる。

⁵ 不確実性 (リスク) を解消するために必要な金融商品が市場で取引されていない状態を、市場が非完備であるという。

⁶ 表1から、 $0.985 + 0.960 + \dots + 0.345 = 12.847$

⁷ $32 \div 1366 = 0.02343$

リバース・デュアル・カレンシー債は、ちょうどyがゼロの状態であり、前述の例では、yがゼロになるときの第一項のx/Bは0.02343ということになる。

リバース・デュアル・カレンシー債の例が示すように、x、B、yは相互に関連している。簡単のためにBを100とし(本稿においては、以降の数値例すべてに亘りB=100と置いた)、表1に従ってxとyの関係式を導いてみよう。

まず、ドル割引債の購入金額は、

$$x/100 \times 12.847 \times 106.35 = x \times 13.66$$

である。また、表1から、1年物から20年物まで額面1円の円建て借入を実行した場合の財務収入は17.12円である⁸。よって、xとyにおいては(2)式が成立してはならない。

$$x \times 13.66 = 32 + 17.12 \times y \tag{2}$$

これをyについて解くと、↗

$$y = 0.7981 \times x - 1.87 \tag{3}$$

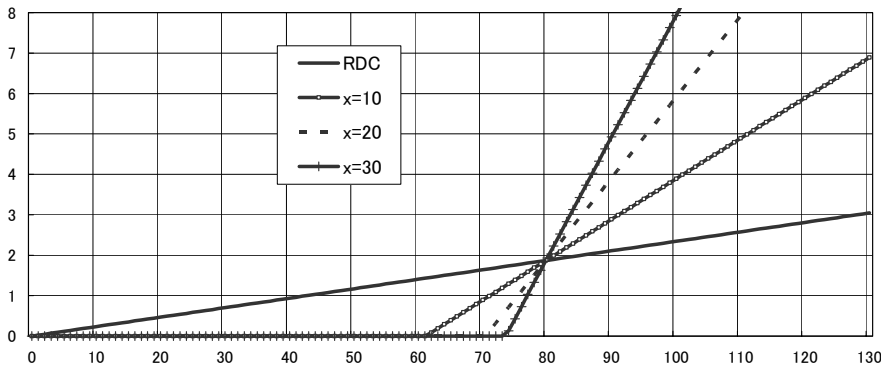
となる。また、(1)式と(3)式から、ちょうどクーポンがゼロとなる為替レートKは、

$$K = y \times B / x = 79.81 - 187 / x \tag{4}$$

となる。

さて、yは(3)式に従って算定されるものとしよう。横軸に為替レート、縦軸にPRDCのクーポンレートをとり、いくつかのxの場合について描いてみると図1のようになる。為替レートが80円のところで結束点がある。xを高めていくと(3)式に従いyも上昇する。しかし、yの上昇によるクーポンレートの抑制効果は円安領域では小さいため、Kよりも円安の領域ではクーポンレートは爆発的に上昇する。なお、xの上昇に伴いゼロクーポンとなる為替レートKは上昇していくが、(4)式にみるようにKは79.81を超えることはない。

図1 PRDCのクーポンレート



(縦軸：クーポンレート、横軸：スポット為替レート)

3. 通貨オプションの考慮

前章のクーポンレート計算では、ゼロクーポンとなる為替レートKよりも円高が起きた場合の考慮がされていないことに気が付いた読者もいることだろう。例えば、x=10とした場合、(4)式から計算されるクーポンがゼロとなる為替レートKは、

$$79.81 - 187 / 10 = 61.11$$

となる。仮に、利払い時点の為替レートが1ドル50円となっていたとしよう。ドル建て割引債の償還金を円転して5円⁹。一方、円建て借入金の返済額は(3)式により6.111円なので1.111円の資金不足が発生してしまう。

この資金不足に対処するためには、発行時点において通貨プットオプションを購入しておけばいい。よって、

$$P + x \times 13.66 = 32 + 17.12 \times y \tag{5}$$

と修正されることになる。同様に(3)式は次の(6)式に修正される。

$$y = 0.7981 \times x - 1.87 + 0.0584 \times P \tag{6}$$

ゼロクーポンとなる為替レートを示した(4)式も同様に(7)式に修正される。

$$K = y \times B / x = 79.81 - 187 / x + 5.84 \times P \tag{7}$$

通貨プットオプションの行使価格は、PRDCの変動クーポンがゼロになる為替レートKに設定される。(7)式に示されるように、xが与えられている場合、通貨プットオプションの購入額Pが決まれば行使価格Kが決まる。しかし、行使価格Kが決まらなると通貨プットオプションの購入額Pは決まらない。KとPは相互依存関係にある。本稿では、

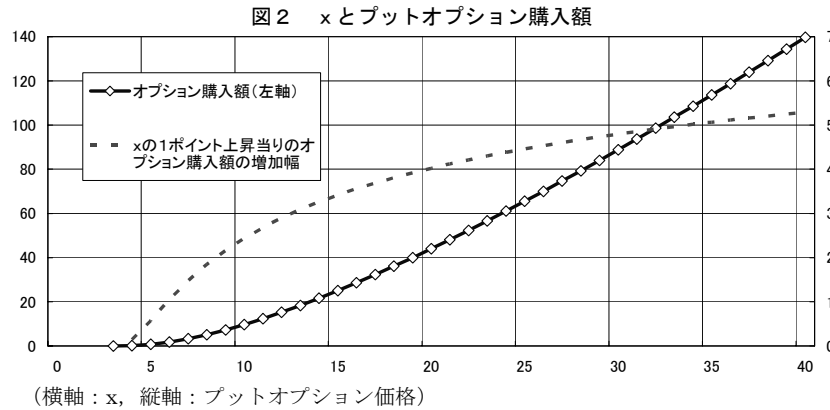
- ①(5)式において通貨プットオプションの購入額Pを初期値として与え、
 - ②(6)式、(7)式とたどって行使価格Kを算出し、
 - ③算出された行使価格Kをもとに通貨プットオプションの購入額Pを再計算して(5)式に代入する、
- という反復計算を行った。これにより(5)式、(6)式、(7)式を同時に満足する通貨プットオプションの購入額Pおよび行使価格Kを求めた。

図2に、xとオプション購入額Pの関係を示す。

図2における“xの1ポイント増加当りのオプション購入額の増加幅”は、xの上昇に伴って行使価格Kの上昇は鈍くなっていくが、外貨プットオプションの想定元本はドル建て割引債の購入額の増加に比例するために、プットオプションの購入額は限りなく増大していくことを示している。

⁸ 表1から、0.999+0.997+・・・+0.680 = 17.12

⁹ B=100、x=10なので、ドル建て割引債の額面は10/100=0.1ドル。1ドル50円の為替レートで円転して5円。

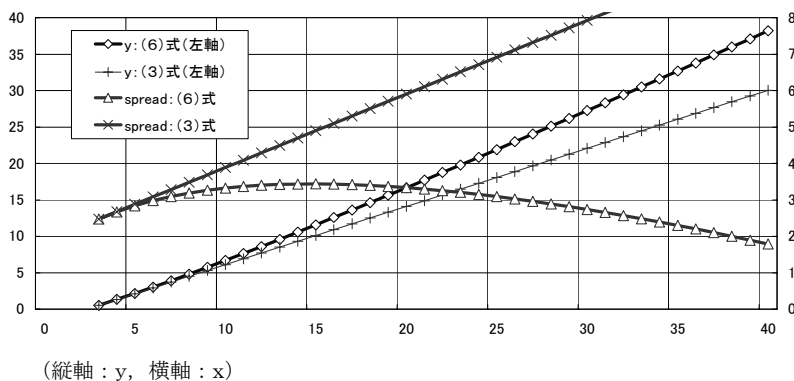


次に、xとyの関係を**図3**に示す。通貨オプションを考慮した場合((6)式)と考慮しない場合((3)式)と比較した。Spreadとあるのは、

$x-y$

であり、これは、“利払い時点の為替レートが1ドル100円であったときのクーポンレートである”と考えることもできよう。通貨オプションを考慮すると、Spreadはx

図3 xとyの関係



4. PRDC価格形成の現実

20年物PRDCの例を続けよう。xを13, Bを100として前章の計算を行うと、yが9.58と算出された。クーポンレートは(8)式で決まる。

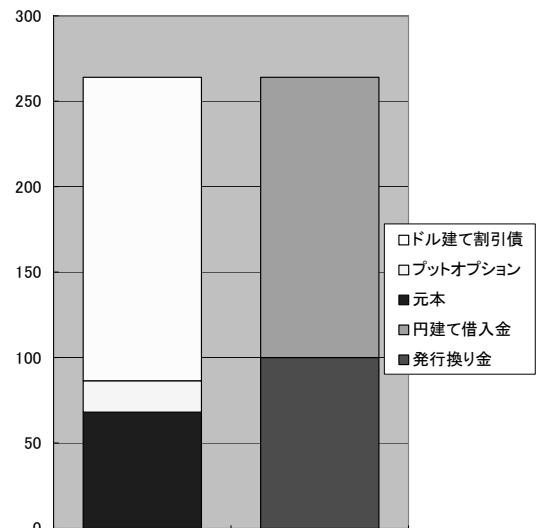
$$\frac{13}{100}S - 9.58 \text{ もしくは } 0 \tag{8}$$

ただし、Sは利払い時点のスポット為替レートである。発行コストなどを考慮しないPRDCの価格形成を示したのが**図4**である。

発行時点のドル建て割引債の円換算ポジションは177.6円である¹⁰。発行時の為替レート1ドル106.35円が、発行直後に1円円高に振れたとしよう。ドル建て割引債の円換算ポジションは175.9円となり、1.67円の評価損が発生する。為替レートがゼロクーポンにならない水準である限り、その損失は投資家に転嫁される。そして、為替レートがゼロクーポンを超えて円高になった場合には、ドル建て割引債の円換算ポジションの評価損は投資家に

が15のときに最大となり、xを15を超えて増加させるとSpreadは減少していく。このように、通貨オプションはPRDCのクーポン決定式((1)式)に対して無視できない影響を及ぼしている。

図4 PRDCの価格形成



転嫁するだけではカバーできず、プットオプションの実現益が必要となってくる。もしも、理論どおり前章で行ったようなポジションを組むことができれば、あらゆる為替レートにおいて、発行体側にはクーポンの利払いリスクは残らない。しかし、PRDCの場合、期間が長いことが多いため、円建て借入やプットオプションの購入を理論どおり実行できない、あるいは、実行できたとしても、理論価格から大きく乖離した不利な水準である、とみるのが実務的であろう。こうした市場の非完備性に対しては、つぎのような対策が考えられる。

- (1) 円建て借入の非完備性に対しては、金利先物、債券先物といった商品先物や、流動性の高い国債、定型的取引である金利スワップなどを利用して、類似のポジションを作っていく。
- (2) プットオプションの非完備性に対しては、フォワード為替取引や、ドル建て割引債、円建て借入のポジションを増減させる。

(1)も(2)も、完備市場であった場合と比較してポジションの誤差を伴う。また、ポジションが評価損となった場合には、追加証拠金が求められたり、取引相手の与信枠に抵触してポジションを増やせなくなるリスクがある。

¹⁰ $0.13 \times 12.847 \times 106.35 = 177.6$

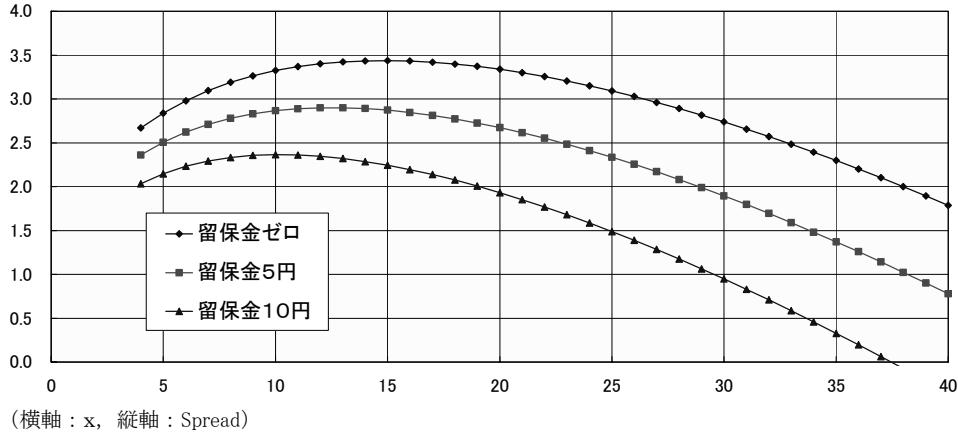
さらに、商品の売買に伴って取引コストを消耗していく。

こうした実装上の問題に対し、留保金を用いるのが一般的な対処方法と言えよう。留保金の源泉は投資家に支払うクーポンであることは言うまでもない。留保金をRとしよう。(5)式～(7)式におけるオプション購入額P

を、(P+R)で置き換えることで、留保金Rを確保した場合のクーポン決定式を導くことができる。

図3と同様に、Spreadをとおして、留保金がクーポン決定式をどのように変化させるのかをみることにしよう。図5は、留保金がゼロ、5円、10円の3つの場合について、Spreadとxの関係を示したグラフである。

図5 留保金がある場合のxとSpreadの関係



留保金は投資家に還元されないので、留保金を考慮して算定されたクーポンレート決定式に従って時価を計算すると、留保金分だけ値下がりすることになる。時価の値下がりとして確認される留保金が正当なコストか否かの判断は、PRDCという商品に対するニーズの強さ次第だろう。非完備市場の下における、商品の複雑性・困難度、そして、元本確保型債券で目先4%の利回りがある商品性を考えれば、少なくとも留保金の一部は必要なコストとして認識して良いのではないだろうか¹¹。

5. むすび

本稿では、PRDCの一般的な特約であるコール条項、キャップ条項について触れる紙面がなかった。しかしながら、PRDCの骨組みについては、前稿[1]および本稿で理解いただけたのではないかと考えている。

PRDCの発行体側につくフィナンシャルエンジニアは、与えられた留保額のなかで、創意工夫によって市場非完備性に端を発する困難さを克服することが求められる。そのアプローチは十人十色と言ってもよく、PRDCの価格評価に差異が生じる所以である。

金融工学では、取引コストを考慮して、最適なポジション修正タイミングを決定する研究がある([2][3][4][5])。また、類似ポジションの作成誤差や必要となる証拠金の目安について研究した文献もある([6][7])。市場非完備性という実務的課題について、理論的なアプローチはまだ緒についたばかりだ。

¹¹ 商品性についての市場評価については、日経金融新聞2003年11月20日「ミドル市場争奪戦(中)」が参考になる。

参考文献

- [1] 柴崎百合子, 山田雅章; 「パワー・リバース・デュアル・カレンシー債の数理(1)」, 大阪証券取引所, 2004年3月
- [2] Bensaid et al.; "Derivative asset pricing with transaction costs," *Mathematical Finance*, 1992 April.
- [3] Boyle et al.; "Option replication in discrete time with transaction costs," *The Journal of Finance*, 1992 March.
- [4] Leland; "Option pricing and replication with transaction costs," *The Journal of Finance*, 1985 December.
- [5] 山田雅章; 「取引コストを考慮したオプション価格理論入門」, レクチャーノート, 金融財務研究会, 2001 April.
- [6] Glasserman; "Shortfall risk in long-term hedging with short-term futures constructs," 2001.
- [7] Heath et al.; "Numerical comparison of local risk-minimisation and mean-variance hedging," 2001.

¹ 本稿では、通貨プットオプションの算出はブラックショールズモデル(BS)で行った。BSでは、国内金利、海外金利、通貨ボラティリティをパラメータとして与える必要がある。国内金利と海外金利は、オプション期間に応じて表1から計算される割引債利回りを適用した。ボラティリティは、円ドル為替相場の月次変化率の実績値の観察をもとに、オプション期間に関係なく、年率12%とした。

各種構成銘柄の追加について

モルガン・スタンレー・キャピタル・インターナショナル社は、定期見直しに伴い、MSCI JAPAN Indexの構成銘柄を追加することについて発表いたしましたので、下記のとおり、お知らせします。

記

1 MSCI JAPAN Index

補充銘柄(コード)	補充銘柄(コード)	補充銘柄(コード)	実施日
ニチメン・日商岩井ホールディングス	2768 リンナイ	5947 新生銀行	8303
アルフレッサホールディングス	2784 日立建機	6305 日立キャピタル	8586
日本ゼオン	4205 サミー	6426 東急不動産	8815
関西ペイント	4613 サンケン電気	6707 レオパレス21	8848
ヤフー	4689 NECエレクトロニクス	6723 日本リテールファンド投資法人投資証券	8953
グッドウィル・グループ	4723 ユニデン	6815 小田急電鉄	9007
楽天	4755 NOK	7240 北海道電力	9509
神戸製鋼所	5406 アイシン精機	7259 富士ソフトABC	9749
日新製鋼	5407 シーアンドエス	7437 ニトリ	9843
日本軽金属	5701 良品計画	7453	
三和シヤッター工業	5929 クラヤ三星堂	7459	

以上