解　　説

東京都立大学21世紀COEプログラム研究レポート(第４回)「Realized Volatilityを用いた日経225先物価格のボラティリティの予測」

東京都立大学大学院社会科学研究科博士課程　柴田　　舞
東京都立大学経済学部教授　渡部　敏明

１．はじめに

近年，資産価格のティックデータが利用可能になってきたことにより，Realized Volatility（以下RVと略す）と呼ばれる新たなボラティリティの推定方法に注目が集まっている。これは Andersen and Bollerslev（1998）が提唱したもので，日中の例えば５分ごとのリターンの２乗を足し合わせたものを日次ボラティリティの推定値とするという方法である。

RVはティックデータさえあれば簡単に計算できるので，RVを用いた実証分析が欧米を中心に盛んに行われており，興味深い結果が報告されている。例えば，Blair et al.（2001），Martens（2001，2002），Hol（2003）らは，GARCHモデルやSVモデルといったボラティリティ変動モデルのボラティリティの式にRVを説明変数として加えることで将来のボラティリティの予測力が向上することを示している。しかし，日本ではこれまでRVに関する研究はほとんど行われていない[1]。

そこで，本稿では日経225先物価格のボラティリティの予測にRVが有用であるかどうか実証分析を行った。具体的には，ボラティリティ変動モデルの一つであるGJRモデル（Glosten et al. 1993）のボラティリティの式にRVを説明変数として加えることで将来のボラティリティの予測力が向上するかどうか分析を行っている。

本稿で特に注意したのはRVの計算における夜間と昼休みのリターンの取り扱いである。Martens（2002）や Hol（2003）は，夜間のリターンはノイズを多く含んでいる可能性があるので，RVの計算に夜間のリターンの２乗は加えず，代わりに分散比で調整する方法を提案している。日経225先物の取引には昼休みがあるので，本稿では夜間だけでなく昼休みのリターンの２乗も加えないで同様に分散比で調整する方法を提案し，どのRVを用いた場合に最もボラティリティの予測力が向上するか比較を行っている。

また，予測精度を比較する場合には真の値が必要になるが，ボラティリティの真の値はわからないので，これまで代理変数として日次価格変化率の２乗を用いることが多かった（渡部2000 2.3.3節）。ところが，日次価格変化率の２乗の変動はボラティリティ以外の変動も含むので，それを真のボラティリティの代理変数として用いると，ボラティリティの予測精度をうまく計測できないことがAndersen and Bollerslev（1998）で指摘されている。彼らは真のボラティリティの代理変数にRVを用いることを提案しており，そうするとボラティリティの予測精度を正確に計測できることを示している。そこで，本稿では真のボラティリティの代理変数にもRVを用いて予測精度の比較を行っている。

２．RVの計算方法

本稿では，日経QUICK情報から購入した日経225先物価格のティックデータを用いて2000年１月５日から2003年12月29日までの計975日のRVを計算している[2]。日経225先物は限月の異なる５つの先物が同時に取引されているので，限月に入るまでは期近物の価格を用い，限月に入ったら次の限月のものに切り替えた。ティックデータからまず５分刻みで価格を取り出し[3]，次にそれらの対数階差をとることによりリターンを計算した。

日経225先物の取引は９時から11時までの前場と12時半から15時10分までの後場に分かれている。本稿では，

[1] TOPIXのRVを用いた分析に，生方（2004）がある。

[2] ただし，2001年９月12日は同時テロの影響があるので除いた。さらに，大発会と大納会はいずれも午前中しか取引が行われないので除いた。

[3] 寄付と引け以外の価格は基準とする時間の直前の約定価格とした。例えば，９時35分ならば９時35分の前で最も９時35分に近い約定価格である。

前場と後場の５分ごとのリターンだけでなく，前日の終値から次の日の始値までの夜間のリターンと前場の終値から後場の始値までの昼休みのリターンも計算した。この夜間と昼休みのリターンをどう取り扱うかで，３通りのRVを計算している。以下，$t-1$ 日の終値から t 日の始値までの夜間のリターンの２乗を $r_{N,t}^2$，前場５分ごとのリターンの２乗和を $SSR_{M,t}$，前場終値から後場始値までの昼休みのリターンの２乗を $r_{L,t}^2$，後場５分ごとのリターンの２乗和を $SSR_{A,t}$ と表すことにする。

まず，以下のようにすべてのリターン２乗を単純に足し合わせたRVを計算した。

$$RV_{1,t} = r_{N,t}^2 + SSR_{M,t} + r_{L,t}^2 + SSR_{A,t}$$

次に，Martens（2002）や Hol（2003）に従い，次のように夜間のリターンの２乗は加えずに分散比で調整したRVも計算した。

$$RV_{2,t} = \frac{S_N^2 + S_D^2}{S_D^2}(SSR_{M,t} + r_{L,t}^2 + SSR_{A,t})$$

ここで，S_N^2 と S_D^2 はそれぞれ前日の終値から次の日の始値までの夜間のリターンとその日の始値から終値までのリターンの標本分散である。

さらに，次のように，夜間だけでなく昼休みのリターンの２乗も加えないで分散比で調整したRVも計算した。

$$RV_{3,t} = \frac{S_N^2 + S_M^2 + S_L^2 + S_A^2}{S_M^2 + S_A^2}(SSR_{M,t} + SSR_{A,t})$$

ここで，S_M^2，S_L^2，S_A^2 は，それぞれ，前場の始値から終値まで，前場の終値から後場の始値まで，後場の始値から終値までのリターンの標本分散である。

各RVの平均値と標準偏差が**表１**に計算されている。平均は３つともほぼ同じ値であるが，標準偏差はRV1が他の２つと比べてかなり大きい。このことはRV1にのみ含まれている夜間リターンの２乗の変動が大きいことを示唆している。

表１：各RVの平均と標準偏差

	RV1	RV2	RV3
平均	2.589	2.519	2.562
標準偏差	2.686	1.478	1.531

３．モデル

株式市場では，価格が上がった日の翌日よりも下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇する傾向があることが知られている。そこで，本稿の分析では，そうしたボラティリティ変動の非対称性を考慮したGJRモデルを用いている[4]。

$t-1$ 日の終値から t 日の終値までの日次リターンから平均を除いたものを ε_t とすると，GJRモデルは次のように表される。

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \qquad z_t \sim N(0,1) \tag{1}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 D_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \tag{2}$$

ここで，D_{t-1} は ε_{t-1}<0 ならば０，それ以外なら１となるダミー変数である。したがって，α_2>0 であれば，価格が上がった日の翌日よりも価格が下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇することになる。

本稿では，以下のように(2)式の右辺にRVを加えることによりボラティリティの予測力が向上するかどうか分析を行った。

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 D_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + \gamma RV_{i,t-1} \qquad (i = 1,2,3) \tag{2'}$$

また，RVにRV1，RV2，RV3のどれを用いた場合にボラティリティの予測力が最も高くなるかも分析している。以下では，RVをボラティリティの説明変数に加えた(1)，(2')式から成るモデルをGJR+RVモデルと呼ぶ。

４．ボラティリティの予測力の比較

GJRモデルとRVをRV1，RV2，RV3にしたGJR+RVモデルの計４つのモデルでそれぞれ１期先のボラティリティの予測値を計算し，予測精度を比較した[5]。１期先のボラティリティの予測値は次のように計算した。まず，GJRモデルでは２期から706期までの日経225先物の日次リターンを使って，GJR+RVモデルではさらに１期から705

[4] 柴田（2004）では，GARCHモデルを用いた分析も行っている。GARCHモデル，GJRモデル，その他のボラティリティ変動モデルについて詳しくは渡部（2000）を参照のこと。

[5] 柴田（2004）では，さらに５期先や20期先のボラティリティの予測値も計算し，比較を行っている。

期のRVも使ってパラメータを最尤推定し，その下で707期のボラティリティの予測値 $\hat{\sigma}^2_{707}$ を計算する。次に，GJRモデルでは３期から707期の日次リターンを，GJR+RVモデルではさらに２期から706期のRVも使ってパラメータを最尤推定し，その下で $\hat{\sigma}^2_{708}$ を計算する。これを繰り返し，各モデルについて269個のボラティリティの１期先予測値 $\{\hat{\sigma}^2_{707},...,\hat{\sigma}^2_{975}\}$ を計算した。

このようにして得られたボラティリティの予測値の精度を分析する場合に問題となるのは，ボラティリティは真の値がわからないので，予測誤差が計算できないということである。そこで，これまで，ε_t^2 を真のボラティリティの代理変数として比較を行うことが多かった。しかし，ε_t^2 はボラティリティ σ_t^2 の変動以外に z_t^2 の変動も含むので，ε_t^2 を代理変数とするとGARCHモデルやSVモデルのボラティリティの予測精度を過小評価してしまうことが Andersen and Bollerslev（1998）で指摘されている。彼らは真のボラティリティの代理変数としてRVを用いることを提案しており，本稿でもそれに従った。具体的には，GJRモデルではRV1，RV2，RV3それぞれを真のボラティリティの代理変数として，GJR+RVモデルではボラティリティの説明変数として用いたRVを代理変数として，それぞれ平均２乗誤差率（Root Mean Squared Error Ratio: RMSER）

$$RMSER=\sqrt{\frac{1}{269}\sum_{t=707}^{975}\left(1-\frac{\hat{\sigma}_t^2}{RV_{i,t}}\right)^2}\quad (i=1,2,3)$$

を計算した[6]。

結果は**表２**に示されている。**表２**からわかることは，次の２つである。(1) RV1，RV2，RV3のいずれを用いた場合でも，ボラティリティの説明変数にRVを含めることでRMSERが低下している。(2) 夜間と昼休みのリターン２乗を加えずに分散比によって調整したRV3を用いた場合にRMSERが最小となっている。

表２：ボラティリティの１期先予測のRMSER

	GJR	GJR +RV
RV1	0.969	0.867
RV2	0.620	0.477
RV3	0.599	0.462

５．結論と今後の課題

本稿では，日経225先物価格のボラティリティの予測にもRVが有用であることを示した。具体的には，GJRモデルのボラティリティの式に説明変数としてRVを加えることにより将来のボラティリティの予測力が向上することを示している。また，RVを計算する際に，夜間同様，昼休みのリターンの２乗も加えないで分散比で調整した方がより予測力が高まることもわかった。

本稿ではRVを将来のボラティリティの予測に用いたが，Value-at-Risk (VaR) やオプション価格への応用なども今後分析すべき重要な課題である[7]。

COEプログラムの辞退について

本研究は文部科学省21世紀COEプログラム「金融市場のミクロ構造と制度設計」の援助により行われたものです。ご承知のように，我々は文部科学省にこのCOEプログラムの辞退を申し入れ，今月でプログラムを終了することになりました。辞退の理由につきましては，我々のCOEホームページ

http://www.bcomp.metro-u.ac.jp/economics/coe/index.html

をご覧下さい。大阪証券取引所をはじめこれまで我々のプログラムを応援して頂いた方々には心より感謝致します。

[6] 柴田（2004）では，平均絶対値誤差率（Mean Absolute Error Ratio: MAER）

$$MAER=\frac{1}{269}\sum_{t=707}^{975}\left|1-\frac{\hat{\sigma}_t^2}{RV_{i,t}}\right|$$

や平均誤差率（Mean Error Ratio: MAER）

$$MER=\frac{1}{269}\sum_{t=707}^{975}\left(1-\frac{\hat{\sigma}_t^2}{RV_{i,t}}\right)$$

も計算しているが，結果はRMSERと変わらないので，本稿では割愛する。

[7] RVのVaRへの応用については，Giot and Laurent（2004）を参照のこと。

参考文献

［1］Andersen, T. G., and T. Bollerslev (1998), "Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts," *International Economic Review*, 39, 885-905.

［2］Blair, B. J., S. Poon and S. J. Taylor (2001), "Forecasting S&P100 Volatility: The Incremental Information Content of Implied Volatilities and High-frequency Index Returns," *Journal of Econometrics*, 105, 5-26.

［3］Giot, P., and S. Laurent (2004), "Modelling Daily Value-at-Risk Using Realized Volatility and ARCH Type Models," *Journal of Empirical Finance*, 11, 379-398.

［3］Glosten, L. R., R. Jagannathan and D. Runkle (1993), "On the Relation between the Expected Value and the Volatility of Nominal Excess Returns on Stocks," *Journal of Finance*, 48, 1779-1801.

［4］Hol, E. M. J. H. (2003), *Empirical Studies on Volatility in International Stock Markets*, Kluwer Academic Publishers.

［5］Martens, M. (2001), "Forecasting Daily Exchange Rate Volatility Using Intraday Returns," *Journal of International Money and Finance*, 20, 1-23.

［6］Martens, M. (2002), "Measuring and Forecasting S&P 500 Index-futures Volatility Using High-frequency Data," *Journal of Futures Markets*, 22, 6, 497-518.

［7］生方雅人（2004）「Realized Volatilityの有用性とボラティリティ変動モデルの予測精度に関する実証分析」東京都立大学21世紀COEディスカッションペーパーNo.53（COEホームページからダウンロード可）.

［8］柴田舞（2004）「Realized Volatilityを用いたGARCHモデルの予測力の比較」東京都立大学21世紀COEディスカッションペーパーNo.34（COEホームページからダウンロード可）.

［9］渡部敏明（2000）『ボラティリティ変動モデル』朝倉書店.