解　説

ARCH型モデルを用いた日経225オプション価格の計量分析*

東京都立大学経済学部教授
渡部　敏明

1　はじめに

オプション価格の導出に用いられる Black/Scholes (1973)モデルでは，ボラティリティと呼ばれる原資産価格変化率の２次のモーメントは満期まで一定であると仮定する。ところが，近年，ボラティリティは日々確率的に変動するという考えが主流になってきており，そうしたボラティリティの変動を明示的に定式化するボラティリティ変動モデルに注目が集まっている。ボラティリティ変動モデルの代表的なものに，Engle (1986)によって提案されたARCHモデルおよびそれを拡張したモデルがある(そうしたモデルを総称して，本稿ではARCH型モデルと呼ぶことにする)。本論文は，そうしたモデルを使うことにより，実際のオプション価格の変動をよりうまく捉えることができるようになるかどうかを日経225コールオプション価格データを用いて実証分析したものである。

2　ARCH型モデル

本稿では，t期の原資産価格変化率を$R_t=(S_t-S_{t-1})/S_{t-1}$と定義する(その理由については脚注１を参照のこと)。ただし，S_t，S_{t-1}はt期と$t-1$期の原資産価格を表す。このように定義された収益率R_tを$t-1$期において予測可能な変動μ_t (以下，それを期待収益率と呼ぶ)と予測不可能な変動ϵ_tの和 (以下，それを予測誤差と呼ぶ)

$$R_t=\mu_t+\epsilon_t \tag{1}$$

として表す。さらに，予測不可能な変動ϵ_tを，常に正の値をとるσ_tと過去と独立な標準正規分布に従うz_tとの積

$$\epsilon_t=\sigma_t z_t,\quad \sigma_t>0,\quad z_t\sim \text{i.i.d.}N(0,1) \tag{2}$$

として表す。ここで，σ_tをR_tのボラティリティと呼ぶ。

ボラティリティの変動を明示的に定式化する代表的なモデルにARCH型モデルがある(詳しくは，渡部(2000)参照のこと)。本稿では，ARCH型モデルの中から， GARCH, GJR，EGARCHモデルという代表的な３つのモデルを取り上げる。GARCHモデルはBollerslev(1986)によって提案されたモデルで，ボラティリティの２乗σ_t^2を過去のボラティリティの２乗と過去の予測誤差の２乗の線形関数として定式化する。ここでは，特にGARCH(1, 1)モデル

$$\sigma_t^2=\omega+\beta\sigma_{t-1}^2+\alpha\epsilon_{t-1}^2,\qquad \omega>0,\qquad \beta,\alpha\geq 0. \tag{3}$$

を用いている。

株式市場では，株価が上がった日の翌日よりも株価が下がった日の翌日の方がボラティリティが上昇する傾向があることが知られており，こうしたボラティリティ変動の非対称性はGARCHモデルでは捉えることができない。そこで，そうしたボラティリティ変動の非対称性を考慮に入れたモデルとして， Glosten/Jaganathan/Runkle (1993)のGJRモデルとNelson(1991)のEGARCHモデルも用いている。

GJRモデルでは，ϵ_{t-1}が負であれば１，それ以外ではゼロであるようなダミー変数D_{t-1}^-を用いることによって，ボラティリティ変動の非対称性を捉える。ここでは，特にGJR(1, 1)モデル

$$\sigma_t^2=\omega+\beta\sigma_{t-1}^2+(\alpha+\gamma D_{t-1}^-)\epsilon_{t-1}^2,\qquad \omega>0,\quad \beta,\alpha,\gamma\geq 0. \tag{4}$$

を用いているが，このモデルでは，$\gamma>0$であれば，株価が上がった日の翌日よりも下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇することになる。

EGARCHモデルでは，左辺をσ_t^2ではなく，$\ln(\sigma_t^2)$にする。そうすることにより，負の値をとり得るような変数でも右辺に説明変数として加えることが可能となる。EGARCHモデルでは過去の予測誤差ϵ_{t-1}をボラティリティσ_{t-1}で割って基準化した$z_{t-1}(=\epsilon_{t-1}/\sigma_{t-1})$を右辺に加えることにより，ボラティリティ変動の非対称性を捉える。ここでは，特にEGARCH(1, 1)モデル

$$\ln(\sigma_t^2)=\omega+\beta\ln(\sigma_{t-1}^2)+\gamma z_{t-1}+\alpha(|z_{t-1}|-E(|z_{t-1}|)) \tag{5}$$

を用いているが，このモデルでは，$\gamma<0$であれば，株価が上がった日の翌日よりも下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇することになる。

3　危険中立性を仮定したオプション価格の導出法

本稿では，まず，投資家が危険中立的であると仮定してオプション価格を導出する。投資家が危険中立的であれば，期待収益率μ_tは安全資産の金利rと等しくなければ

*本研究は筆者が日本銀行金融研究所客員研究員として行った研究の一部である。日本銀行金融研究所の方々および北海道大学で行われた研究会「ファイナンスへの統計理論，時系列解析及びそれらの応用」参加者からは本研究に関して貴重なコメントを頂いた。また，日本銀行金融研究所研究生だった里吉清隆氏にはデータの整理および計算を手伝ってもらった。最後に，本研究で用いている日経225オプションデータは大阪証券取引所より提供して頂いたものである。ここに記して感謝の意を表したい。

ならないので，(1)，(2)式は，

$$R_t = r + \epsilon_t,\quad \epsilon_t = \sigma_t z_t,\quad z_t \sim \text{i.i.d.N}(0,1) \tag{6}$$

となる[1]。

現在T期において，標本$\{R_1, \ldots, R_T\}$が与えられているものとする。投資家が危険中立的であり，原資産価格変化率がGARCHモデル(6)，(3)式に従う場合，$T+\tau$期が満期で権利行使価格Kのコール・オプションのT期のプレミアムC_Tは以下のアルゴリズムにより導出できる。

[1] 標本$\{R_1, \ldots, R_T\}$と(6)，(3)式を使って，未知パラメータ(ω，β，α)を最尤推定する。

[2] 互いに独立な標準正規分布から$\left\{z_{T+1}^{(i)}, \ldots, z_{T+\tau}^{(i)}\right\}_{i=1}^{n}$をサンプリングする。

[3] [2]でサンプリングされた値を(6)，(3)式に代入して，$\left\{R_{T+1}^{(i)}, \ldots, R_{T+\tau}^{(i)}\right\}_{i=1}^{n}$を得る。ただし，未知パラメータの値は[1]で推定された最尤推定値とする。

[4] 次の式を使ってオプションの満期$T+\tau$における原資産価格$\left(S_{T+\tau}^{(1)}, \ldots, S_{T+\tau}^{(n)}\right)$を計算する。

$$S_{T+\tau}^{(i)} = S_T \prod_{s=1}^{\tau}\left(1 + R_{T+s}^{(i)}\right). \tag{7}$$

[5] 次の式からオプション価格を計算する。

$$C_T = (1+r)^{-\tau} E\left[\text{Max}(S_{T+\tau} - K, 0)\right], \tag{8}$$

$$\approx (1+r)^{-\tau} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \text{Max}(S_{T+\tau}^{(i)} - K, 0). \tag{9}$$

GJR，EGARCHモデルの場合も，(3)式を(4)または(5)式に換えれば同様にオプション価格を導出できる。

4　実証結果

実証分析に用いたオプションは1997年５月限月から2002年４月限月までのすべての権利行使価格の日経225コールオプション(計609)である。それらのオプションの満期から30日前の終値を分析対象とした。安全資産の金利rには１ヶ月物のコールレートを用いた。モデルのパラメータは，満期の30日前からさらに1,500日前までの日経225株価指数変化率を用いて最尤法により推定を行った。

[1] これは$R_t = (S_t - S_{t-1})/S_{t-1}$と定義しているからで，もし連続複利計算を使って$R_t = \ln(S_t) - \ln(S_{t-1})$と定義すると，(6)式は，$z_t$が標準正規分布に従うなら，

$$R_t = r - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \epsilon_t \tag{6'}$$

となる。ここで，(6')式の金利rは連続複利であるのに対して，(6)式のrはそうではないことに注意すること。(6')式はスケーリングに対して不変ではなく，R_tを%で計るのとそうでないのとでは別のモデルになってしまうという問題が生じるのと，例えば，z_tがt分布に従う場合には，(6')式の右辺第２項に相当する項が解析的に求まらないので，本稿では，$R_t = (S_t - S_{t-1})/S_{t-1}$と定義し，(6)式を用いることにした。

すなわち，パラメータの推定に用いた標本の大きさはT＝1,500である。また，1997年５月限月のオプションに対応したものから2002年４月限月のオプションに対応したものまで異なる60の標本期間があるので，それぞれの標本期間でパラメータの推定を行った。パラメータの推定結果は省略するが，すべての標本期間でGJRモデルのγの推定値には統計的に有意な正の値，EGARCHモデルのγの推定値には統計的に有意な負の値が得られており，このことから日経225株価指数にも上がった日の翌日よりも下がった日の翌日の方がボラティリティが高まるというボラティリティ変動の非対称性が存在することが確認された。

オプション価格の導出には上の[1]－[5]のアルゴリズムを用いたが，その際，シミュレーションの回数はn＝10,000とした。また，分散減少法として制御変数法(control variates)と負相関法(anthithetic variates)とを組み合わせて用いた。どのモデルが実際のオプション価格の変動をよりうまく捉えられるかを比較するため，各モデルから推定されたオプション価格と市場価格とを使って平均２乗誤差率(RMSE Rate)

$$\text{RMSE Rate} = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\hat{C}_{\text{推定値}}^{i} - C_{\text{市場価格}}^{i}}{C_{\text{市場価格}}^{i}}\right)^2}$$

を計算した。ここで，mは分析に用いたオプションの標本の大きさであり，ここではm＝609である。結果は以下の通りである。

表１：RMSE Rate

$R_t = r + \epsilon_t,\quad \epsilon_t = \sigma_t z_t,\quad z_t \sim \text{i.i.d.N}(0,1)$

GARCH	GJR	EGARCH
0.7020	0.4125	0.4071

RMSE Rateが最も低いのはEGARCHであり，以下，GJR，GARCHの順になっている。ボラティリティ変動に有意な非対称性が存在するため，それを考慮に入れたEGARCH，GJRモデルの方が考慮に入れないGARCHモデルよりもより実際のオプション価格の変動を捉えることができるというのは直感的である。比較のため，通常のBlack/Scholes公式によってもオプション価格を導出した。その際のボラティリティには過去20日間のヒストリカル・ボラティリティを用いた。Black/Scholes公式を使った場合のRMSE Rateは0.7540であり，GARCH，EGARCH，GJRモデルのRMSE Rateはいずれもそれよりも低くなっている。

５ モデルの拡張

５．１　誤差項の分布

以上の分析では，誤差項z_tの分布は標準正規分布に従うと仮定したが，z_tの分布には標準正規分布よりもスチューデントのt分布の方が当てはまりがよいことが明らかになっている(渡部(2000)2.4.2節参照)。そこで，z_tが分散を１に基準化したt分布に従う場合，すなわち，(6)式を，

$$R_t = r + \epsilon_t,\ \epsilon_t = \sigma_t z_t,\ z_t \sim \text{i.i.d.standardized}-t(\nu) \quad (10)$$

に置き換えた分析も行った。ここで，νはt分布の自由度を表す。

引き続き投資家の危険中立性を仮定すると，GARCHモデル(10)，(3)式の下でオプション価格を導出するためには，上の[1]－[5]のアルゴリズムの[1]－[3]を次のように書き換えるだけでよい。

[１′]標本$\{R_1, \ldots, R_T\}$と(10)，(3)式を使って，未知パラメータ(ω，β，α，ν)を最尤推定する。

[２′]互いに独立な自由度νの分散１に基準化されたt分布から$\left\{z_{T+1}^{(i)}, z_{T+2}^{(i)}, \ldots, z_{T+\tau}^{(i)}\right\}_{i=1}^{n}$をサンプリングする。ただし，$\nu$は[１′]で得られた最尤推定値とする。

[３′][２′]でサンプリングされた値を(10)，(3)式に代入して，$\left\{R_{T+1}^{(i)}, \ldots, R_{T+\tau}^{(i)}\right\}_{i=1}^{n}$を得る。ただし，未知パラメータの値は[１′]で推定された最尤推定値とする。

パラメータの推定結果は省略するが，z_tが標準正規分布に従うというのを帰無仮説，t分布に従うというのを対立仮説として仮説検定を行うと，すべての標本期間およびすべてのモデルで帰無仮説は棄却された。この場合のオプション価格の推定値のRMSE Rateは以下の通りである。

表２：RMSE Rate

$$R_t = r + \epsilon_t,\ \epsilon_t = \sigma_t z_t,\ z_t \sim \text{i.i.d. standardized}-t(\nu)$$

GARCH	GJR	EGARCH
0.8577	0.5189	0.4498

z_tの分布を正規分布にした場合(**表１**)とt分布にした場合(**表２**)とを比べると，すべてのモデルで後者の方がRMSEが高くなっている。この結果は，z_tの分布をt分布にした方が原資産である日経225株価指数の変動を捉えるには望ましいにもかかわらず，オプション価格の変動を捉えるのにはかえってパフォーマンスが悪くなるということを意味しており，興味深い。

５．２　局所危険中立性の仮定の下でのオプション価格の導出

以上の分析では，投資家の危険中立性を仮定してオプション価格を導出したが，Duan(1995)は危険中立性よりも緩い局所危険中立性(Locally Risk-Neutral Valuation Relationship)の仮定の下で，原資産価格がARCH型モデルに従う場合のオプション価格を導出する方法を提案している。投資家が危険中立的でない場合，真の確率測度Pと危険中立確率測度Qとが異なるので，それらを区別しなければならない。局所危険中立性とは，危険中立確率測度Qと真の確率測度Pが以下の３つの条件を満たすことをいう。

- $R_t | I_{t-1}$が確率測度Qの下で正規分布に従っている。
- $E^Q[R_t | I_{t-1}] = r.$
- $Var^Q[R_t | I_{t-1}] = Var^P[R_t | I_{t-1}]$ a. s.

ここで，I_{t-1}は$t-1$期までの利用可能な情報集合，$E^Q[\cdot]$は確率測度Qの下での期待値，$Var^Q[\cdot]$，$Var^P[\cdot]$はそれぞれ確率測度Q，Pの下での分散を表す。

Duan(1995)は，こうした局所危険中立性を仮定すると，(1)－(3)式から成るGARCHモデルが危険中立確率測度Qの下では以下のようなモデルに変換されることを示している。

$$R_t = r + \sigma_t \xi_t \quad \xi_t | \phi_{t-1} \sim \text{i.i.d.N}(0,1), \quad (11)$$

$$\lambda_t = \frac{\mu_t - r}{\sigma_t}, \quad (12)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(\xi_{t-1} - \lambda_{t-1})^2 \sigma_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2. \quad (13)$$

EGARCH，GJRモデルも同様に変換できる。

投資家の危険中立性を仮定しないなら，原資産の価格変化率の期待値は安全資産の金利rと等しくなくてよい。そこで，期待収益率が過去の収益率やボラティリティに依存する可能性を考慮に入れ，

$$\mu_t = r + a + bR_{t-1} + c\sigma_t^2,$$

すなわち，(6)式を，

$$R_t = r + a + bR_{t-1} + c\sigma_t^2 + \epsilon_t,\ \epsilon_t = \sigma_t z_t,\ z_t \sim \text{i.i.d.N}(0,1) \quad (14)$$

に置き換えて分析を行った[2]。

この場合，パラメータの推定は真のモデル(14)，(3)式を使って行い，シミュレーションは(11)－(13)式から成る危険中立確率測度Qの下でのモデルを使って行えばよい。したがって，オプション価格は以下のアルゴリズ

[2] Duan(1999)は，局所危険中立性の仮定を拡張することにより，z_tが標準正規分布以外の分布に従うモデルについても危険中立確率測度Qの下でのモデルに変換する方法を提案しているが，この方法は膨大な時間がかかり事実上実行不可能であるため，ここではz_tが標準正規分布に従うモデルだけを分析した。

ムにより導出できる。

[1″]標本$\{R_1, \ldots, R_T\}$とPの下でのモデル(14), (3)式を使って，未知パラメータ(ω, β, α, a, b, c)を最尤推定する。

[2″]互いに独立な標準正規分布から$\left\{\xi^{(i)}_{T+1}, \ldots, \xi^{(i)}_{T+\tau}\right\}^{n}_{i=1}$をサンプリングする。

[3″][2″]でサンプリングされた値をQの下でのモデル(11)–(13)式に代入して，$\left\{R^{(i)}_{T+1}, \ldots, R^{(i)}_{T+\tau}\right\}^{n}_{i=1}$を得る。ただし，未知パラメータの値は[1″]で推定された最尤推定値とする。

[4″]次の式を使ってオプションの満期$T+\tau$における原資産価格$\left(S^{(1)}_{T+\tau}, \ldots, S^{(n)}_{T+\tau}\right)$を計算する。

$$S^{(i)}_{T+\tau} = S_T \prod_{s=1}^{\tau}\left(1+R^{(i)}_{T+s}\right). \tag{15}$$

[5″]次の式からオプション価格を計算する。

$$C_T = (1+r)^{-\tau} E^Q\left[\mathrm{Max}(S_{T+\tau}-K,0)\right], \tag{16}$$

$$\approx (1+r)^{-\tau}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Max}(S^{(i)}_{T+\tau}-K,0), \tag{17}$$

(14)式は，$a=b=c=0$ であれば，(6)式になるので，投資家は危険中立的($P=Q$)ということになり，Duan(1995)の方法と危険中立性を仮定した方法とは同じことになる。ここでもパラメータの推定結果は省略するが，ほとんどの標本区間で，$a=b=c=0$，すなわち，投資家が危険中立的であるという帰無仮説は棄却されなかった。この場合のオプション価格の推定値のRMSE Rateは以下の通りである。

表３：RMSE Rate

$R_t = r + a + bR_{t-1} + c\sigma_t^2 + \epsilon_t$, $\epsilon_t = \sigma_t z_t$, $z_t \sim$ i.i.d.N(0,1)

GARCH	GJR	EGARCH
0.8863	0.7013	0.4526

(14)式を用い，オプション価格をDuan(1995)の方法によって推定すると(**表３**)，危険中立性を仮定して(6)式を用いた場合(**表１**)に比べてRMSE Rateがかえって高くなっていることが見て取れる。

６　結論

本稿の主な結論は以下の通りである。

1. 株式市場では価格の下がった日の翌日にボラティリティが上昇する傾向があることが知られているが，日経225変化率のボラティリティの変動にもそうした非対称性が存在するので，非対称性を捉えられないGARCHモデルよりもボラティリティ変動の非対称性を考慮したGJR，EGARCHモデルを使った方が，より現実の動きに近いオプション価格を導出できる。
2. 日経225変化率でもGARCHモデルの誤差項の分布をt分布にした方がフィットが良くなるが，誤差項の分布をt分布にしたモデルを使っても現実のオプション価格の動きをうまく捉えられるようにはならない。
3. 日経225変化率の期待収益率と安全資産収益率として用いた１ヶ月物のコールレートとの差は統計的に有意ではないため，それらが乖離する可能性を考慮に入れ，Duan(1995)の方法によってオプション価格を求めても現実のオプション価格の動きをうまく捉えられるようにはならない。

参考文献

1　渡部敏明(2000)『ボラティリティ変動モデル』朝倉書店.

2　Black, F., and M. Scholes (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, **81**, 673-659.

3　Bollerslev, T. (1986). "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, **31**, 307-327.

4　Duan, J.-C. (1995), "The GARCH Option Pricing Model", *Mathematical Finance*, **5**, 13-32.

5　Duan, J.-C. (1999), "Conditionally Fat-Tailed Distributions and the Volatility Smile in Options," Working Paper, Department of Finance, Hong-Kong University.

6　Engle, R. F. (1982), "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation," *Econometrica*, **50**, 987-1007.

7　Glosten, L. R., R. Jagannathan and D. Runkle (1993), "On the Relation between the Expected Value and the Volatility of Nominal Excess Returns on Stocks," *Journal of Finance*, **48**, 1779-1801.

8　Nelson, D. B. (1991), "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach," *Econometrica*, **59**, 347-370.