解　　説

２変量GARCHモデルによるヘッジの効率性

東京都立大学経済学部教授　渡部敏明
東京都立大学大学院社会科学研究科博士課程　柴田　舞

１．はじめに

先物を保有する目的の一つに現物の価格変動のリスクヘッジがある。現物と先物から構成されるポートフォリオの価格変化率の分散を最小にするために必要な現物１単位あたりの先物保有高を最適ヘッジ比率と呼び、それは現物と先物の価格変化率の共分散を先物の価格変化率の分散で割った値になる。そこで、もし現物と先物の価格変化率の分散や共分散が時間を通じて変動するならば、最適ヘッジ比率もそれに伴って変動することになる。複数の資産の価格変化率の分散や共分散の時間を通じた変動を明示的に定式化する代表的な時系列モデルに多変量GARCHモデルがある。本稿は現物と先物の価格変化率を２変量GARCHモデルで定式化し、それによって最適ヘッジ比率を計算することで、ヘッジの効率性が上昇するかどうかを日経平均株価指数およびその先物のデータを使って実証分析したものである。

２．最適ヘッジ比率

現物１単位のt-１期からt期までの価格変動をヘッジするためにt-１期においてϕ_t単位の先物を保有するものとしよう。このとき、現物と先物の価格変化率をそれぞれs_t，f_tで表すと、最適ヘッジ比率とは、$s_t-\phi_t f_t$のt-１期の情報に基づく条件付分散を最小にするϕ_tのことである。ここで、s_t，f_tのt-１期の情報に基づく条件付分散をそれぞれ$h_{s,t}$，$h_{f,t}$、s_tとf_tの条件付共分散を$h_{sf,t}$で表すと、$s_t-\phi_t f_t$のt-１期の情報に基づく条件付分散は、

$$h_{s,t}+\phi_t^2 h_{f,t}-2\phi_t h_{sf,t}$$

となり、これを最小化するϕ_tは、

$$\phi_t^* = h_{sf,t}/h_{f,t} \qquad (1)$$

である。もし$h_{sf,t}$や$h_{f,t}$が時間を通じて一定であれば、最適ヘッジ比率ϕ_t^*も時間を通じて一定となり、s_tをf_tに回帰した係数として最小２乗法（OLS）により簡単に推定できる。しかし、$h_{sf,t}$や$h_{f,t}$が時間を通じて変動する場合には、それらを各期各期予測し、予測された値を(1)式に代入することにより最適ヘッジ比率を計算しなければならない。

３．２変量GARCHモデル

まず、現物の価格変化率s_tと先物の価格変化率f_tを以下のように定式化する。

$$s_t=\mu_s+\varepsilon_{s,t}, \qquad f_t=\mu_f+\varepsilon_{f,t}. \qquad (2)$$

ここで、μ_s, μ_sはそれぞれs_t，f_tの平均を表す。誤差ベクトル$[\varepsilon_{s,t},\varepsilon_{f,t}]'$のt-１期の情報に基づく条件付分布は平均$[0,0]'$の２変量正規分布であると仮定する。$\varepsilon_{s,t}$, $\varepsilon_{f,t}$の条件付分散$h_{s,t}$，$h_{f,t}$および条件付共分散$h_{sf,t}$の変動を定式化するために、本稿では２変量GARCHモデルを用いる。２変量GARCHモデルはいくつかの異なるモデルが提案されている（詳しくは

Bollerslev / Engle / Nelson (1994) を参照のこと）が、本稿の分析では代表的なモデルである(a)ベクトルGARCHモデル、(b)対角化ベクトルGARCHモデル、(c)相関係数一定モデル、(d)BEKKモデルをすべて用いている。以下、これらのモデルについて説明する。

(a) ベクトルGARCHモデル

ベクトルGARCHモデルでは、$h_{s,t}$, $h_{f,t}$, $h_{sf,t}$ の変動を次のように定式化する。

$$\begin{pmatrix} h_{s,t} \\ h_{sf,t} \\ h_{f,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon^2_{s,t-1} \\ \varepsilon^2_{fs,t-1} \\ \varepsilon^2_{f,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{s,t-1} \\ h_{sf,t-1} \\ h_{f,t-1} \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

ここで、 c_i, a_{ij}, g_{ij} $(i, j = 1,2,3)$ は未知のパラメータである。$[\varepsilon^2_{s,t-1}, \varepsilon^2_{fs,t-1}, \varepsilon^2_{f,t-1}]'$, $[h_{s,t-1}, h_{fs,t-1}, h_{f,t-1}]'$ だけでなく、さらにそれらの過去の値も加えることができるが、そうするとパラメータの数が多くなり推定が困難なので、本稿では(3)式のような最も簡単な定式化を採用する。

(b) 対角化ベクトルGARCHモデル

ベクトルGARCHモデル(3)式において、パラメータの数を減らすため、以下のように右辺第２項および第３項のパラメータ行列を対角行列にしたものが、対角ベクトルGARCHモデルである。

$$\begin{pmatrix} h_{s,t} \\ h_{sf,t} \\ h_{f,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon^2_{s,t-1} \\ \varepsilon^2_{fs,t-1} \\ \varepsilon^2_{f,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{s,t-1} \\ h_{sf,t-1} \\ h_{f,t-1} \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

(c) 相関係数一定モデル

分散 $h_{s,t}$, $h_{f,t}$ は変動するものの、相関係数 ρ は時間を通じて一定であると仮定するモデルである。このモデルでは、共分散は次のように表される。

$$h_{sf,t} = \rho\sqrt{h_{s,t}h_{f,t}}, \quad -1 \le \rho \le 1.$$

分散の変動は、本稿では、通常の１変量GARCHモデル

$$h_{s,t} = c_s + a_s\varepsilon^2_{s,t-1} + g_s h_{s,t-1}, \qquad c_s > 0, \quad a_s, g_s \ge 0,$$

$$h_{f,t} = c_f + a_f\varepsilon^2_{f,t-1} + g_f h_{f,t-1}, \quad c_f > 0, \quad a_f, g_f \ge 0,$$

によって定式化する。ここで、パラメータに非負制約を課すのは分散が負にならないようにするためである。

(d) BEKKモデル

BEKKモデル[1]では、分散共分散行列

$$H_t = \begin{bmatrix} h_{s,t} & h_{sf,t} \\ h_{sf,t} & h_{f,t} \end{bmatrix}$$

の変動を次のように定式化する。

$$H_t = C'C + A'\varepsilon_{t-1}\varepsilon'_{t-1}A + G'H_{t-1}G. \qquad (5)$$

ここで、行列 C は未知のパラメータからなる２行２列の上三角行列で、行列 A, G は未知のパラメータからなる２行２列の行列である。分散共分散行列をこのように２次形式として定式化するのは、分散共分散行列が正値定符号行列であることを保証するためである。

BEKKモデルと相関係数一定モデルでは分散共分散行列は正値定符号行列であることが保証されるが、ベクトルGARCHモデルと対角化ベクトルGARCHモデルでは保

証されない。しかし、ベクトルGARCHモデルと対角化ベクトルGARCHモデルにおいても分散共分散行列が正値定符号行列であることを保証するための制約を課すことは可能であり（詳しくは、Engle / Kroner (1995) を参照のこと）、本稿でもベクトルGARCHモデルと対角化ベクトルGARCHモデルはそうした制約の下で推定を行っている。パラメータは全て最尤法により推定した。

4．推定結果

本稿の分析で用いたデータは、東京証券取引所市場第一部上場225銘柄で構成される日経平均株価と大阪証券取引所で取引されている日経225先物価格の日次データである[2]。日経225先物市場では、常に限月の異なる５つの先物が取引されており、先物価格はその中の期近ものの価格を使用し、限月に入ったらすぐに翌限月ものの価格に切り替えている。最適ヘッジ比率の計算は以下の通り行っている。まず、1994年３月29日から1998年４月14日までの1000個の標本を使って各２変量GARCHモデルのパラメータを最尤推定し、次に、パラメータの値を推定された値に固定して１期先の分散および共分散の予測を2002年４月23日まで行った。最期に、予測された分散および共分散を(1)式に代入することにより最適ヘッジ比率を計算した。

表１は、各モデルで予測された最適ヘッジ比率 ϕ_t^* を使って現物１単位と先物 ϕ_t^* 単位からなるポートフォリオの価格変化率 $s_t - \phi_t^* f_t$ の標本分散を計算したものである。この標本分散の値が小さいほど、ヘッジの効率性が高いことになる。**表１**では、比較のため、最適ヘッジ比率を最小２乗法（OLS）によって計算した場合についても同様に $s_t - \phi_t^* f_t$ の標本分散を計算している。また、単純にヘッジ比率を１に固定した場合や先物によるヘッジを全く行わない場合とも比較するため、$s_t - f_t$ や s_t の標本分散も計算している。言うまでもなく、先物によるヘッジを行わない場合の標本分散は2.536で、他と比べて飛びぬけて大きな値になっている。また、２変量GARCHモデルにせよOLSにせよ最適ヘッジ比率を計算してヘッジを行った方がヘッジ比率を１に固定した場合よりも標本分散が小さくなっており、ヘッジの効率性は高まっている。OLSと２変量GARCHモデルとを比べると、２変量GARCHモデルとしてベクトルGARCHモデルを用いた場合にはOLSよりも標本分散が小さくなっており、ヘッジの効率性は高まっている。ところが、BEKKモデルを用いた場合には標本分散はOLSと同じで、それ以外の対角化ベクトルGARCHモデルや相関係数一定モデルを用いた場合にはOLSよりも分散が大きくなっている。このことは、２変量GARCHモデルを用いれば必ずOLSよりもヘッジの効率性が高まるというわけではなく、モデルの選択を誤るとむしろ効率性が下がってしまう可能性があることを示しており、重要である。

＜参考文献＞

Bolerslev, T., Engle, R. F. and D. B. Nelson (1994) “ARCH Models,” in R. F. Engle and D. McFadden, eds., *The Handbook of Econometrics, Volume 4*, pp. 2959-3038, Amsterdam: North-Holland.

Engle, R. F. and K. F. Kroner (1995) “Multivariate Simultaneous Generalized ARCH,” *Econometric Theory*, 11, pp. 122-150.

表１　ポートフォリオのリターンの分散

多変量GARCH				OLS	ヘッジ比率＝1	ヘッジなし
ベクトル	多角化ベクトル	相関係数一定	BEKK			
0.239	0.252	0.244	0.242	0.242	0.264	2.536

注

[1] Baba、Engle、Kraft、Kronerによって提案されたので、
４人の頭文字をとってBEKKモデルと呼ばれている。

[2] これらのデータはすべて大阪証券取引所から提供して
頂いた。ここに記して感謝の意を表したい。