

解 説

オプション価格の評価と マルコフ連鎖モンテカルロ法

東京都立大学 経済学部 助教授
浅井 学

1 はじめに

株価や金利の価格過程は確率微分方程式 (stochastic differential equation, SDE) によるモデルで記述される。ブラック＝ショールズのオプション価格評価公式 (Black and Sholes, 1973) に代表されるように、金融派生証券の価格付けも拡散過程によるモデルの記述がベースとなっている。現実のデータを用いて価格付けを行う際には、まずSDEの未知パラメータを推定する必要がある。ところで、モデルは連続時間で表現されているものの、観測されるのは離散的なデータである。本稿では、Euler-Maruyama近似のような離散化をもとに推定したパラメータはバイアスが大きいこと、従って、このときの価格付けもバイアスが大きい事を示す。そしてこのようなバイアスは、マルコフ連鎖モンテカルロ法 (Markov chain Monte Carlo, MCMC) でうまく克服できることを示す。なお本稿は浅井 (2002) の研究の一部に加筆したものである。

2 MCMCのアイデア

まずSDEのパラメータをMCMCにより推定する方法としてElerian, Chib and Shephard (2001)のアプローチがある。次のようなSDE

$$dy(t) = a\{y(t), t, \theta\}dt + b\{y(t), t, \theta\}dB(t) \quad (1)$$

を満たす確率過程を考える。ただし、 $a\{y(t), t, \theta\}$ と $b\{y(t), t, \theta\}$ はそれぞれドリフト関数とボラティリティ関数であり、 $y(t)$ と時点 t 、未知パラメータ θ に依存している。またSDEが拡散過程 $y(t)$ として解をもつための条件は満たされているものと仮定する。さらに時点 $\{\tau_1, \dots, \tau_T\}$ における $y(t) = y(\tau_i)$ は観測されているものとする。ただし簡単のため時間間隔は一定で $\Delta^\dagger = \tau_{i+1} - \tau_i \geq 0$ とする。ここでの目的は、観測値 $Y = (y_1, \dots, y_T)'$ が与えられたときに θ を推定することにある。

尤度原理の枠組みでは、 θ の推定は尤度関数 $\log L(y_2, \dots, y_T | y_1, \theta) = \sum_{i=1}^{T-1} \log g(y_{i+1} | y_i, \theta)$ に基づ

いて行われる。ただし $g(y_{i+1} | y_i, \theta)$ はマルコフ型の推移密度関数である。もし拡散過程の強解があるならば、すなわち、 $t \in (0, T]$ について確率微分方程式

$$y(t) = y(0) + \int_0^t a\{y(s), s, \theta\}ds + \int_0^t b\{y(s), s, \theta\}dB(s)$$

をIto積分で解析的に解くことができるのならば、 $g(y_{i+1} | y_i, \theta)$ の解析解も利用可能であり、尤度関数からそのまま最尤推定できる。しかし、問題はSDEはわずかな場合を除いて解析解をもたないことにある。Elerian, Chib and Shephard (2001)のアプローチの基本的なアイデアは、任意の二つの離散的観測値の間にある拡散過程の値を単なる欠損値として扱い、欠損値やパラメータをMCMCにより推定しようというものである。

なお、SDEが解析解をもたない場合における派生証券の価格付けについて触れておく。大まかに述べると、格子モデルやモンテカルロ法による方法がある。格子モデルは、SDEを離散近似することにより価格を評価する方法である。またモンテカルロ法による派生証券の価格付けの基本は、リスク中立測度における原証券価格のサンプル (あるいはサンプルパス) を乱数を用いて発生させ、実際のペイオフを計算機上でシミュレートすることにある。ところで計量ファイナンスの考え方からすれば、ここで用いられるパラメータの値自身に関する誤差も問題になる。すなわち、もし現実の価格付けの参考とするために格子モデルやモンテカルロ法を用いるならば、その基となる未知パラメータも信頼できる方法で推定する必要があるのではないだろうか。後ほど紹介するように、離散近似による最尤推定値ではバイアスが大きすぎて、真の値を含まない場合も多々ある。なおSDEの未知パラメータを離散的に観測される標本を用いて推定する方法自体も大きなテーマであり、最近ではAit-Sahalia (2002) が最尤法をもとにした方法を提案している。ところでMCMCによる方法ならば、このようなバイアスを解決するだけでなく、推定と同時に価格評価を行うことができる。

さてElerian, Chib and Shephard (2001)のアプローチに戻ろう。まずSDEのEuler-Maruyama近似

$$y_{i+1} = y_i + a(y_i, t, \theta)\Delta_i^\dagger + b(y_i, t, \theta)(B_{i+1} - B_i) \quad (2)$$

を考える。このとき推移確率密度関数は、 $\phi(\cdot | n, \nu)$ を平均 m で分散 ν の正規分布の密度関数とすると

$$f(y_{i+1} | y_i, \theta) = \phi\{y_{i+1} | y_i + a(y_i, t, \theta)\Delta_i^\dagger, b^2(y_i, t, \theta)\Delta_i^\dagger\} \quad (3)$$

となる。これはSDEの最も簡単な離散時間近似であるものの、通常、真の推移密度関数を適切に近似するものと

しては粗雑すぎる。なおEuler-Maruyama近似よりも効果のある方法としてShoji and Ozaki (1998)の局所線形化法

があるが、本稿の目的を超えてしまうので紹介しない。

図1 データ拡張のイメージ図

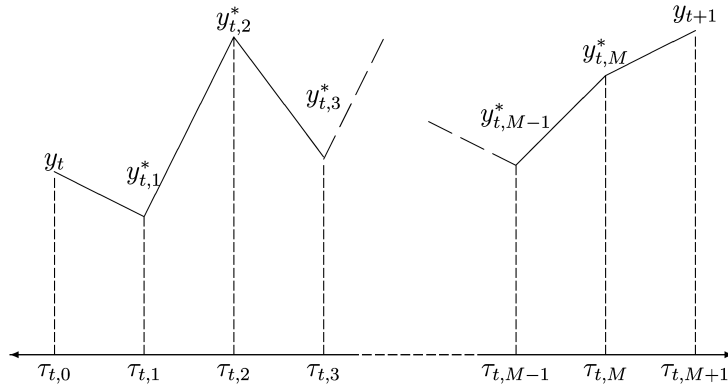


図1では二つの隣接した時点(τ_t, τ_{t+1})を考え、観測値 y_t と y_{t+1} の間に任意の点 y_i^* を与えている。区間 (τ_t, τ_{t+1}) を均等に分割した M 個の補助時点 (auxiliary times) を $\{\tau_{t,1}, \dots, \tau_{t,M}\}$ とする。このとき区間幅は、すべての t と k について

$$\Delta^\dagger = \tau_{t,k+1} - \tau_{t,k} = \frac{\Delta^\dagger}{M+1}$$

となる。それぞれの補助時点について $y_{t,j}^* = y^*(\tau_{t,j})$ ($j \leq M$) を観測できない (または潜在的な) 観測値とし、 $y_i^* = (y_{t,1}^*, \dots, y_{t,M}^*)$ を時点 $\{\tau_{t,1}, \dots, \tau_{t,M}\}$ における潜在的な観測値のすべての集合とする。このとき、真の推移密度関数 $g(y_{t+1} | y_t, \theta)$ の近似として

$$\begin{aligned} f^M(y_{t+1} | y_t, \theta) &= \int f(y_{t+1} | y_{t,M}^*, \theta) \left\{ \prod_{j=2}^M f(y_{t,j}^* | y_{t,j-1}^*, \theta) \right\} \\ &\quad \times f(y_{t,1}^* | y_t, \theta) dy_{t,M}^* \cdots dy_{t,1}^* \\ &= \int f(y_{t+1} | y_t^*, \theta) f(y_t^* | y_t, \theta) dy_t^* \quad (4) \end{aligned}$$

を用いれば近似は改善される。ただし

$$\begin{aligned} &f(y_{t,j}^* | y_{t,j-1}^*, \theta) \\ &= \phi\{y_{t,j}^* | y_{t,j-1}^* + a(y_{t,j-1}^*, \tau_{t,j-1}, \theta)\Delta, b^2(y_{t,j-1}^*, \tau_{t,j-1}, \theta)\Delta\} \end{aligned}$$

はEuler近似による推移密度関数である。 $M \rightarrow \infty$ のとき $f^M \xrightarrow{a.s.} g$ を示すことができる。

Elerian, Chib and Shephard (2001)では、補助変数の導入によるメリットを説明するため、具体的にOrnstein-Uhlenbeck (OU)過程の例を紹介している。すなわち(1)式において $a\{y(t), t, \theta\} = \mu y_t$, $b^2\{y(t), t, \theta\} = \sigma^2$, $\theta = (\mu, \sigma^2)$ とした場合である。Euler近似のもとで $y_{t+1} | y_t, \theta$ の条件付き分布は、

$\rho_E^\dagger = 1 + \mu\Delta^\dagger$ とすると、平均が $\rho_E^\dagger y_t$ で分散が $\sigma^2 \Delta^\dagger$ の正規分布である。強解のもとで $y_{t+1} | y_t, \theta$ の分布は、 $\rho_S^\dagger = \exp(\mu\Delta^\dagger)$ とすると、平均が $\rho_S^\dagger y_t$ で分散が $(\sigma^2 / (2\mu))(\rho_S^{2\dagger} - 1)$ の正規分布である。ここで各 y_i について、近接する y_{t-1} と y_{t+1} が与えられたときの y_t の分布を考える。Euler近似のもとでは

$$y_t | y_{t-1}, y_{t+1}, \theta \sim N\left\{ \frac{\rho_E^\dagger}{1 + \rho_E^{2\dagger}} (y_{t-1} + y_{t+1}), \frac{\sigma^2 \Delta^\dagger}{1 + \rho_E^{2\dagger}} \right\} \quad (5)$$

であり、これに対し強解のもとでは

$$\begin{aligned} &y_t | y_{t-1}, y_{t+1}, \theta \\ &\sim N\left\{ \frac{\rho_S^\dagger}{1 + \rho_S^{2\dagger}} (y_{t-1} + y_{t+1}), \frac{\sigma^2}{\{2\mu(1 + \rho_S^{2\dagger}) / (\rho_S^{2\dagger} - 1)\}} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

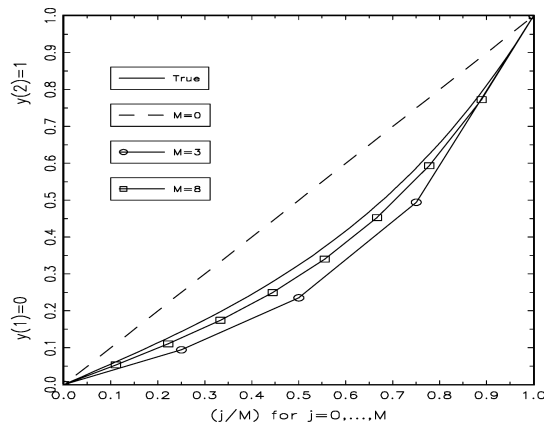
となる。同様にして M 個の潜在的観測値のブロック $y_t^* = (y_{t,1}^*, \dots, y_{t,M}^*)$ を考えると、このとき $f(y_t^* | y_t, y_{t+1}, \theta)$ は正規分布に従い、その平均は

$$\begin{aligned} E(y_t^* | y_t, y_{t+1}, \theta) &= \frac{1}{1 + \rho^2 + \dots + \rho^{2M}} \\ &\times \begin{pmatrix} \rho \sum_{i=0}^{M-1} \rho^{2i} y_t + \rho^M y_{t+1} \\ \rho^2 \sum_{i=0}^{M-2} \rho^{2i} y_t + \rho^{M-1} \sum_{i=0}^1 \rho^{2i} y_{t+1} \\ \vdots \\ \rho^M y_t + \rho \sum_{i=0}^{M-1} \rho^{2i} y_{t+1} \end{pmatrix} \quad (7) \end{aligned}$$

である。ただし ρ は強解のとき $\rho_S = \exp(\mu\Delta)$ であり、Euler近似のときは $\rho_E = 1 + \mu\Delta$ である。OU過程の条件付き分布を解析的に扱えるような形にしたので、強解を使って二つの固定点間におけるパスの期待値を描くことができる。またEuler近似を使ったとき、離散化を変えた

ときにパスの曲率のバイアスがどう変わるかみることができる。

図2 E[y₁^{*}|y₁,y₂,θ]のグラフ(異なるMについてOU過程をEuler近似)



注) Euler 近似の潜在時点数は $M = 0, 3$ および 8 としている。強解は「True」で示されている。すべて μ の値は -1 とし、 $\Delta^\dagger = 2$ としている。固定点は $y_1 = 0$ および $y_2 = y_{1,M+1} = 1$ で、補助変数は $y_1^* = (y_{1,1}^*, \dots, y_{1,M}^*)$ である。

図2には、 $M = 0, 3$ および 8 のときの潜在点 $y_1^* = (y_{1,1}^*, \dots, y_{1,M}^*)$ を使った曲率のバイアスが画かれている。 $M = 0$ のときは二つの固定点 $Y = (y_1, y_2)'$ (ただし $y_1 = 0, y_2 = y_{1,M+1} = 1$) の線形補完になってしまうため、強解の曲率を全く捉えていないことに注意されたい。 M がゼロでないときのパスの期待値は、下方バイアスがあり、OU過程の強解(図の左から2番目の曲線)に収束していく。この図から、 M の値が小さくても $M = 0$ の場合に比べて著しく近似が改善されることが見て取れる。

また μ について真のOU過程の対数尤度 $\sum_{t=1}^{T-1} \log g(y_{t+1} | y_t, \theta)$ と近似値 $\sum_{t=1}^{T-1} \log f^M(y_{t+1} | y_t, \theta)$ を比較することもできる。ただしこの場合

$$g(y_{t+1} | y_t, \theta) = \phi \left[y_{t+1} \mid \exp(\mu \Delta^\dagger) y_t, \frac{\sigma^2}{2\mu} \{ \exp(2\mu \Delta^\dagger) - 1 \} \right]$$

および

$$f^M(y_{t+1} | y_t, \theta) = \phi \left[y_{t+1} \mid \left(1 + \frac{\mu \Delta^\dagger}{M+1} \right)^{M+1} y_t, \sigma^2 \left(1 + \frac{\mu \Delta^\dagger}{M+1} \right) \frac{1 - \left(1 + \frac{\mu \Delta^\dagger}{M+1} \right)^{2(M+1)}}{1 - \left(1 + \frac{\mu \Delta^\dagger}{M+1} \right)^2} \right]$$

である。この場合、推移密度関数 $f^M(y_{t+1} | y_t, \theta)$ は、 $f^M(y_{t+1}, y_{t,M}^* | y_t, \theta)$ を、(4)式に従い y_{t+M}^* について積分することで解析的に求めることができる。なお σ^2 の値を与えたとき、様々な M について尤度の近似値を計算してみると、 M の値が小さいとき近似的な尤度関数は真の μ で最大値をとらない。補完データを使えば尤度の近似の精度が上がり、その結果、事後分布の近似の精度も良くなる。さらに M を動かすことで近似の精度をコントロールできる。

具体的なMCMCによる推定方法およびモデル診断の方法については、Elerian, Chib and Shephard (2001) や浅井(2002)を参照して欲しい。

3 オプション評価の例

オプション評価の例を扱うために、Lo and Wang (1995) と Campbell, Lo and MacKinlay (1997) で使われているモデルと数値例の枠組みにおいて、Elerian, Chib and Shephard (2001) の方法でモデルを推定し、その応用としてオプション価格を計算する。

Lo and Wang (1995) は、価格の対数値 $p(t) = \log S(t)$ がトレンド付きOU過程

$$dp(t) = (-\gamma(p(t) - \mu t) + \mu)dt + \sigma dB,$$

$$\gamma \geq 0, \quad p(0) = p_0, \quad t \geq 0$$

に従うときのオプション価格の計算について論じている。

このトレンド付きOU過程について、収益率を

$r(t) = p(t) - p(t-1)$ とすれば、

$$E[r(t)] = \mu, \quad \text{Var}[r(t)] = \frac{\sigma^2}{\gamma} [1 - e^{-\gamma}]$$

$$\text{Corr}[r(t), r(t-1)] \equiv \rho_1 = -\frac{1}{2} [1 - e^{-\gamma}]$$

となる。したがって、トレンド付きOU過程は、トレンドを取り除けば定常過程に従う。

直感的に言えば、ブラック＝ショールズの公式は平均の部分の問題にならないため、通常の方法でオプション価格を計算できる。注意すべきは、 r_t の無条件分散を、そのまま σ^2 の推定値としては使えないことである。例えば、単純なARMA過程の無条件分散と、誤差項それ自体の分散は異なっていることに注意してほしい。Lo and Wang (1995)の表1およびCampbell, Lo and MacKinlay (1997)の表9.5には、収益率の無条件分散が一定で、相関

係数 ρ_1 が異なる場合、コール・オプション価格がどのように変化するか分析している。参考のために、これを表1にまとめる。

表1の最初の部分は、日次収益率において極端な自己相関があったとしても、満期までの期間が短く、かつイン・ザ・マネーのコール・オプションには影響を及ぼしていない。例えば、日次の収益率が-0.45の場合、実効価格が30ドルで残存期間7日のコールに何の影響も及ぼしていない。しかし、このように残存期間が短いときでも、実行価格が大きくなれば、その違いも明らかになる。例えば、自己相関がないとき、アット・ザ・マネーのときのコールの価値は0.863ドルであるが、自己相関が-0.45になると、その価値も1.368ドルに上昇する。

表1 収益率が負の相関をもつときのオプション価格

実行 価格	B-Sの 価格	トレンド付きOU過程の価格 (日次の相関 ρ_1)					
		-.05	-.10	-.20	-.30	-.40	-.45
満期までの期間 $T-t=7$ 日							
30	10.028	10.028	10.028	10.028	10.028	10.028	10.028
35	5.036	5.037	5.038	5.042	5.051	5.074	5.108
40	0.863	0.885	0.910	0.973	1.062	1.216	1.368
45	0.011	0.013	0.016	0.024	0.041	0.082	0.137
50	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.005
満期までの期間 $T-t=182$ 日							
30	11.285	11.336	11.394	11.548	11.786	12.238	12.725
35	7.558	7.646	7.746	7.998	8.365	9.014	9.668
40	4.740	4.851	4.976	5.286	5.728	6.491	7.244
45	2.810	2.922	3.048	3.361	3.812	4.595	5.375
50	1.592	1.687	1.797	2.073	2.482	3.214	3.963
満期までの期間 $T-t=364$ 日							
30	12.753	12.845	12.950	13.218	13.620	14.349	15.102
35	9.493	9.622	9.469	10.133	10.661	11.582	12.501
40	6.908	7.061	7.234	7.660	8.269	9.315	10.343
45	4.941	5.102	5.283	5.732	6.374	7.478	8.566
50	3.489	3.645	3.821	4.261	4.896	6.003	7.106

注) 対数価格過程がブラウン運動過程に従うときとトレンド付きOU過程に従う場合について、仮想価格が40ドルのときのオプション価格を比較した。ただし、日次収益率の標準偏差を2%、安全証券の利子率を $\log(1.05)/364$ としている。B-Sはブラック＝ショールズの略である。自己相関が絶対値でみて大きくなるにしたがい、オプション価格も上昇する。

表2 オプション価格の最尤推定値

満期までの期間 $T-t=182$ 日				
実行 価格	トレンド付きOU過程の価格(日次の相関 ρ_1)			
	- .05	- .10	- .20	- .30
30	11.256 [11.142, 11.370]	11.206 [11.102, 11.310]	11.110 [11.021, 11.199]	11.017 [10.943, 11.090]
35	7.505 [7.299, 7.710]	7.414 [7.220, 7.608]	7.229 [7.050, 7.407]	7.033 [6.872, 7.195]
40	4.673 [4.411, 4.934]	4.557 [4.308, 4.806]	4.316 [4.082, 4.551]	4.056 [3.837, 4.275]
45	2.742 [2.481, 3.004]	2.627 [2.378, 2.875]	2.388 [2.155, 2.620]	2.131 [1.916, 2.346]
50	1.534 [1.313, 1.756]	1.437 [1.229, 1.644]	1.240 [1.051, 1.428]	1.035 [0.868, 1.203]

注) Euler-Maruyama近似をもとに最尤推定した結果。括弧内は漸近的な95%信頼区間を示す。

しかし、満期までの期間が長くなるにつれ、すなわち、表1のその他の部分については、自己相関の影響は増している。日次の自己相関が-0.10のとき、アット・ザ・マネーの1年ものもコールの価格は7.234ドルであるが、自己相関が-0.45に増えれば、価格は10.343ドルに上昇する。なお、ももとのブラック=ショールズ公式の価格は6.098ドルである。これは、ブラック=ショールズ公式における σ の感応度(オプションのベガ)が、残存期間の増加関数であることを考えれば何の不思議もない。

さて、上記のLo and Wang (1995)およびCampbell, Lo and MacKinlay (1997)の枠組みを踏まえた上で、数値例を紹介する。トレンド付きOU過程において、

$$\mu = \log(1.05)/364, \quad \text{Var}[r(t)] = \frac{\sigma^2}{2}[1 - e^{-\gamma}] = 0.02,$$

満期までの期間を $T-t=182$ 日として、大きさ500の標本を生成する。ただし、日次データに対応して $\Delta^+ = 1$ とする。このとき ρ_1 の値が決まれば、 γ と σ の値も決まる。

Euler-Maruyama近似をもとに最尤推定した結果が、表2に掲載されている。括弧内は漸近的な95%信頼区間を表している。ここでは $\rho \geq -0.3$ の範囲で十分に傾向をつかめるので、他の部分は省略してある。標準誤差はデルタ法により求めた。なお、これはオプションのデルタとは異なる。詳しくは、Campbell, Lo and MacKinlay (1997)の第9章などを参照されたい。特徴的なのは、日次の自己相関係数が-0.05のときを除くと、真の値が95%信頼区間に含まれていないことである。したがって、通常の最尤推定値をもとにオプション価格を計算すると、真の値とはかけ離れてしまうことがわかる。

表3 オプション価格のMCMC推定値($M=10$)

	トレンド付きOU過程の価格(日次の相関 ρ_1)			
	- .05	- .10	- .20	- .30
真の値	4.851	4.976	5.286	5.728
推定値	4.881	4.945	5.194	5.649
	[4.285, 5.543]	[4.347, 5.667]	[4.489, 6.156]	[4.767, 6.806]

注) 満期までの期間は $T-t=182$ 日。実効価格は40ドルである。括弧内は95%信用区間を示す。

このトレンド付きOU過程のパラメータをElerian, Chib and Shephard (2001)の方法で推定する。違いがよくわかるように、アット・ザ・マネーの場合だけを考える。表3には、真の価格、 $M=10$ におけるパラメータの事後平均の推定値、95%区間が示されている。推定結果から、

バイアスが著しく改善されていることが見て取れる。また95%区間は真の値を含んでいる。

参考文献

- [1] Ait-Sahalia, Y. (2002), "Maximum likelihood estimation of discretely sampled diffusions: a closed-form approximation approach," *Econometrica*, 70, 223--262.
- [2] Black, F. and M. Sholes (1973), "The pricing of options and corporate liabilities," *Journal of Political Economy*, 81, pp.637--659.
- [3] Campbell, J.Y., A.W. Lo and A.C. MacKinlay (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, New Jersey: Princeton University Press.
- [4] Elerian, O., S. Chib, and N. Shephard (2001), "Likelihood inference for discretely observed nonlinear diffusions," *Econometrica*, 69, pp.959--993.
- [5] Lo, A. and J. Wang (1995), "Implementing Option Pricing Models when Asset Returns Are Predictable," *Journal of Finance*, 50, pp.87--129.
- [6] Shoji, I. and T. Ozaki (1998), "A statistical method of estimation and simulation for systems of stochastic differential equations," *Biometrika*, 85, pp.240--243.
- [7] 浅井学(2002), 「金融派生証券の価格付けとMCMC」, 未刊行論文, 東京都立大学.