解　　説

疑似乱数を利用したポートフォリオリスクにおける相関の検討

朝日ライフ アセットマネジメント 株式会社
西山　　昇

１．はじめに

現代ポートフォリオ理論では、銘柄間の分散共分散の加重和をトータルリスクと呼び、それを最小化、あるいは、一定水準にコントロールすることでポートフォリオリスク管理のスタンダードとしてきた。言いかえるとポートフォリオリスク管理の議論とは、分散共分散の分解方法についての議論だったともいえる。

ポートフォリオリスクの分解に関して、これまでいくつかの考え方が提示されている。代表的な方法のひとつは、組み入れ銘柄数を増加させること（銘柄分散）によりリスク減少が可能なアンシステマティックリスク部分と銘柄分散によるリスク低減効果が一定水準に限定されるシステマティックリスク部分の２つのパートへの分解である。

本稿においては、主にシステマティックリスク部分における相関の影響を疑似乱数により確認する。仮想的に相関を変化させ、多変量正規疑似乱数によるシミュレーションを行い、相関とポートフォリオリスクとの関係を検討する。

２．ポートフォリオリスクと相関

トータルリスクσ_pの一般式を式（２．１）のように定義する[1]。分散共分散を右辺第一項の主対角部分と右辺第二項の非主対角部分の和として表現する。

（２．１）　$$\sigma_P^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sigma_i^2+\sum_i\sum_{i\neq j}a_i a_j Cov\left(R_i,R_j\right)$$

ここで、ａｉはポートフォリオ内の第i銘柄のウェイト、σｉは第ｉ銘柄のボラティリティ（標準偏差）、Cov（ ）の項は、第ｉ銘柄と第ｊ銘柄の共分散である。

（２．２）　$$\sigma_P^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sigma_i^2+\sum_i\sum_{i\neq j}a_i a_j\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}$$

さらに式（２．１）の右辺第二項のCov（ ）を相関ρにより置き換えると式（２．２）のようになる。式（２．２）からトータルリスクσ_pを低下させるには、右辺第一項においてボラティリティσが低い銘柄をポートフォリオにできる限り数多く組み入れること（銘柄分散効果)、あるいは、右辺第二項において銘柄間の相関ρｉｊの加重和ができる限り小さくなる組み合わせ（低相関効果）を選択することが必要である。

トータルリスクの大きさは、仮にすべての銘柄の標準偏差がσとして等加重でくみあわせ、銘柄間のペアの相関がすべてρであるとすると、式（２．３）のように相関ρの平方根とボラティリティσの積として近似的に表現される。

（２．３）　$$\sigma_P\Rightarrow\sigma\bullet\sqrt{\rho}$$

実際のポートフォリオ運用において、これまで実務的には銘柄分散効果が議論の中心を占めてきた。つまり相関ρはあらかじめコントロール困難とされたためと考えられる。その理由は、例えば株式などのように同じ資産ポートフォリオであれば、銘柄間の相関があらかじめ高い傾向があるためであろう。しかし資産価格の変動が大きくなる急落、急騰局面では、相関が急速に高まることが観察されている。このことから最近ではポートフォリオリスク管理において相関のコントロールが議論されている[2][3]。

３．疑似乱数による検討

３－１．多変量正規疑似乱数の発生

多変量正規疑似乱数を発生させ平均、分散、相関の３パラメータによりシミュレーションをおこなう。平均、分散を固定して相関の変化がポートフォリオリスクに与える影響を確認する。

シミュレーション方法は、30変数（銘柄）のポートフォリオを想定、平均０、分散1に固定して10,000サンプルの疑似乱数を発生させる。(10000期間×30銘柄)
相関のある乱数作成は、次の手順にしたがう[4]。
（１）各々独立な正規分布の疑似乱数を発生させる。
（２）相関のある乱数へ変換する。
相関行列Ｒをコレスキー分解（Cholesky decomposition）すると、U'が上三角行列になる。

$$U'U=R$$

ここでＲ（ｎ×ｎ）は、対称行列かつ正値行列。
③正規疑似乱数行列をＸ（ｍ×ｎ）とすると、相関Ｒから平均０、分散１の正規乱数行列Ｎ（ｍ×ｎ）が計算できる。

$$N=XU'$$

④ここで平均が０、標準偏差を１と指定した疑似乱数と

するため、主対角に標準偏差、それ以外はすべて０の行列Ｓ（ｎ×ｎ）と平均行列Ｍ（１×ｎ）を使って以下のように新しいＮＮ行列（ｍ×ｎ）を計算する。

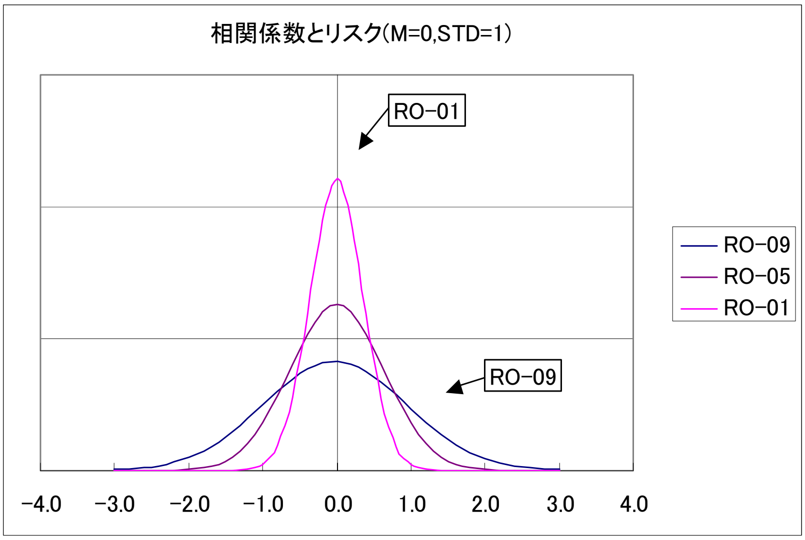
$$NN = NS + M$$

３－２．相関シミュレーション

パラメータは、平均０、分散１に固定、相関のみを変化させてシミュレーションを行なう。

結果をわかりやすくするためペアの相関がすべて同じρと仮定する。疑似乱数より30変数で構成される等加重ポートフォリオを作成し、ポートフォリオリターンの分布を比較する。

相関シミュレーションは２ケースある。(1)銘柄数を固定して相関を変化させるシミュレーション、(2)相関を次の２ケース、低相関（ρ＝0.1)、高相関（ρ＝0.9）に固定して銘柄数を変化させるシミュレーションである。

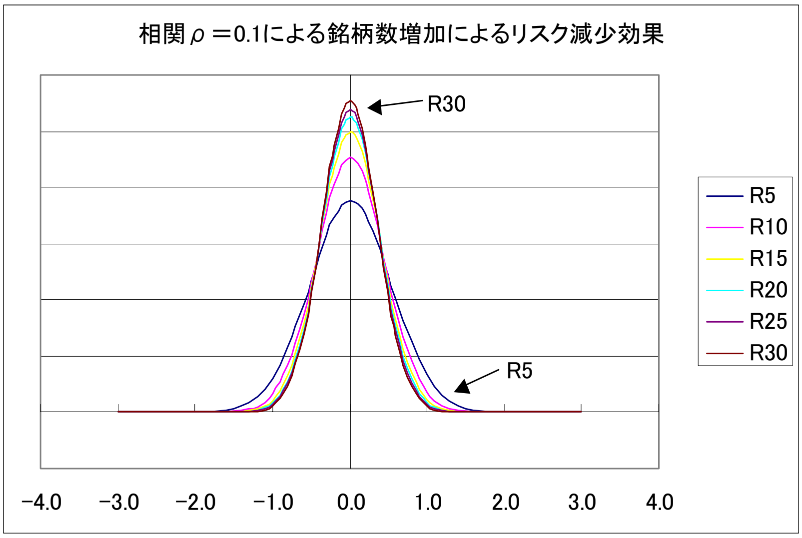


（図１）銘柄数を固定して相関を変化させたケース

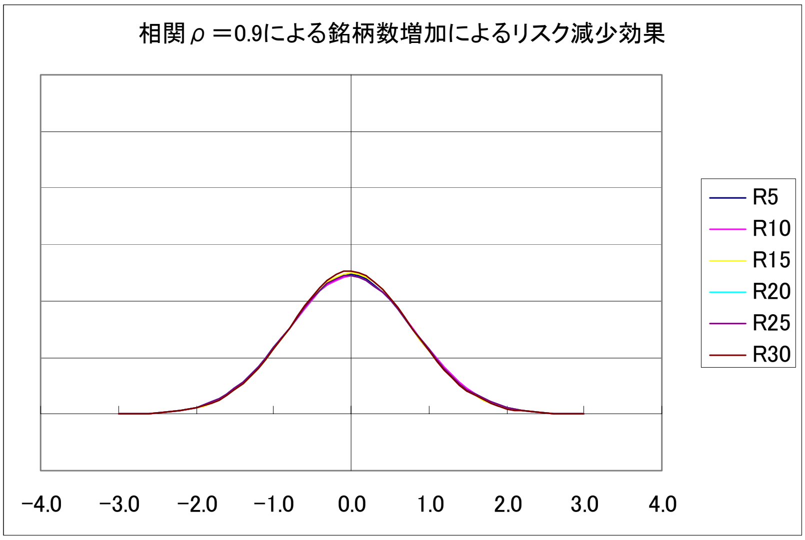
グラフの分布は、横幅が標準偏差（リスク）であり、幅が広い方がリスクが高いことをあらわしている。

最初に銘柄数を30銘柄に固定して、相関を変化させた場合のシミュレーションを行なう（**図１**)。ここでは３ケース、ρ＝0.1（R0-01)、ρ＝0.5（R0-05)、ρ＝0.9（R0-09）のシミュレーションである。グラフから相関が高くなるほどリスクが増加する。このことからリターン（平均)、リスク（標準偏差）よりも相関がポートフォリオリスクに大きく影響していることがわかる。

次に低相関（ρ＝0.1)、高相関（ρ＝0.9）の２ケースについて、銘柄数が５銘柄（R5）から30銘柄（R30）まで５銘柄ずつ変化させたときの等加重ポートフォリオのポートフォリオリターンの分布である（**図２**、**図３**)。



（図２）低相関に固定して銘柄数を変化させたケース

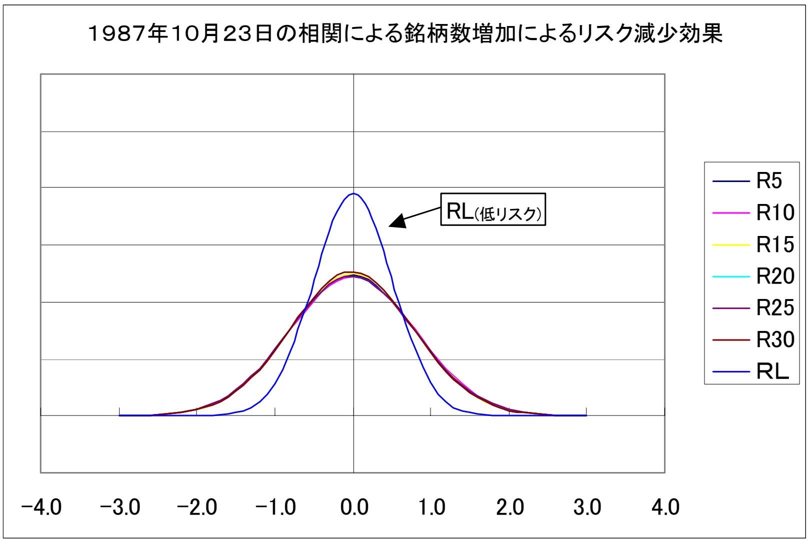


（図３）高相関に固定して銘柄数を変化させたケース

銘柄を増加させることによる銘柄分散効果は、低相関（ρ＝0.1）のポートフォリオの場合には、リスクを減少させる効果があるが、高相関（ρ＝0.9）のポートフォリオの場合は、リスクに対してほとんど低減効果がない。相関が急激に高まるとリスク回避のために打つ手はないことになる。そこでシミュレーションを追加する。

銘柄間の相関がρ＝0.9（R0-09）となることは現実の世界では希である。最も類似するケースは、ブラックマンデー（1987年10月19日）直後の1987年10月23日時点のダウ30種平均の銘柄間の相関である。そこで1987年10月23日時点のダウ30種平均の相関を入力して疑似乱数によるシミュレーションを行なう。相関は週次データ25週間分から計算した相関である。

等加重ウェイトのポートフォリオに30銘柄のリスク回避型ルールでウェイト付けしたポートフォリオを追加して試算する。リスク回避型ウェイトとは、ブラックマンデーが発生する以前のデータから高相関銘柄のグループと低相関銘柄のグループの２グループを作成する。そこで低相関グループのウェイトを高くして、高相関グループのウェイトを相対的に低くするウェイト付けである。



（図４）高相関に固定して低リスクポート（30銘柄）を追加したケース

シミュレーション結果は、低リスク型の加重を行なうと高相関（ρ＝0.9）の場合でもリスク低減が可能であることを示している。

４．結論

本レポートでは、ポートフォリオ理論におけるトータ

ルリスクの考え方から出発した。さらにシステマティックリスクにおける相関の影響に注目、疑似乱数から相関の役割の大きさを確認した。

シミュレーションより得られた結論は、次のことである。(1)相関が高まる局面では、リスクが高くなる傾向があること、(2)急落のような高相関の局面では、銘柄分散効果はほとんど効かなくなること、(3)銘柄分散効果がなくなる局面であってもリスク回避型のウェイト配分により更にリスク低減が可能になること、である。

ただしリスク回避方のウェイト付けは事前に相関が低いグループにウェイトを高くするルールであり、グループの相関特性が時間的に安定していることが条件となる。

〔参考文献〕

[1] Kelly, Michael (1994): “STOCK ANSWER: CORRELATION”, RISK, VOL. 7 / NO 8, AUGUST , pp. 40-43

[2] Boyer, Brian H., Micheael S. Gibson, and Mico Loretan.(1997): “ Pitfalls in Tests for Changes in Correlations. ”Federal Reserve Board, IFS Discussion Paper No. 597R, March 1999.

[3] Harry M. Kat (2002): “THE DANGERS OF USING CORRELATION TO MEASURE DEPENDENCE”, August 19, 2002, Working Paper

[4] 「SASによる金融数理 0.2版」、SAS Institute Japan